## 平成 25 年度 理学系広域科目「集合と位相第一」 整列集合の比較定理

本稿では整列集合の比較定理を証明する. ただし, 講義中に証明を与えた定理は認めて用いることにする. 必要な定義や定理を復習した後, 比較定理の証明を行う.

 $(X, \leq)$  を順序集合とし, x, y, a, b を X の元とする.

注意 以降,  $\leq$  を省略して, X を順序集合とよぶことが多い. また, X の任意の部分集合を, X 上の順序 $\leq$  から定まる自然な順序によって順序集合と考える.  $\diamond$ 

定義 14.1  $(X, \leq)$  が整列集合であるとは、X の空でない任意の部分集合が最小元をもつことである。  $\diamond$ 

以下の定義や定理は講義中に詳しく解説した.

**問 14.2**  $(X, \leq)$  が整列集合ならば、 $(X, \leq)$  は全順序集合である. ♦

記号 14.4  $x \le y$  かつ  $x \ne y$  であることを, x < y と書く.  $\diamond$ 

定義 14.5 X の部分集合  $X\langle a\rangle := \{x \in X \mid x < a\}$  を, X の a による切片という.  $\diamond$ 

**問 14.6** a < b ならば、 $(X\langle b \rangle)\langle a \rangle = X\langle a \rangle$  である.  $\diamond$ 

**定理 14.7**  $f: X \to X$  が順序を保つ単射であるとき, 任意の  $x \in X$  に対し  $x \le f(x)$  が成り立つ.  $\diamond$ 

**定理 14.8** (1) 任意の  $a \in X$  に対し,  $X \in X(a)$  は順序同型でない.

(2) 任意の  $a,b \in X$  に対し,  $a \neq b$  ならば  $X\langle a \rangle$  と  $X\langle b \rangle$  は順序同型でない.  $\diamond$ 

 $(X, \leq), (Y, \leq)$  を整列集合とする.

**問 14.9**  $f: X \to Y$  が順序同型写像であるとき、任意の  $a \in X$  に対し  $f(X\langle a \rangle) = Y\langle f(a) \rangle$  が成り立つ.  $\diamond$ 

次のような集合を考える.

 $X_1 := \{a \in X \mid (a, b) \in W \$ となるような  $b \in Y$ が存在する  $\}$ 

 $Y_1 := \{b \in Y \mid (a, b) \in W \$ となるような  $a \in X \$ が存在する  $\}$ 

まず、次の定理を証明する.

**定理 14.10** (1) ある  $a \in X$  に対し  $X_1 = X(a)$  であるか, もしくは  $X_1 = X$  である.

(2) ある $b \in Y$ に対し $Y_1 = Y(b)$ であるか、もしくは $Y_1 = Y$ である.

**証明** (1) まず、「任意の $a \in X_1$  に対し、 $X\langle a \rangle \subset X_1$  である」・・・(\*) ことを示す. 任意に $a \in X_1$  をとる. $X_1$  の定義より、 $(a,b) \in W$  となるような $b \in Y$  が存在する.つまり、ある $b \in Y$  と、ある順序同型写像 $f: X\langle a \rangle \to Y\langle b \rangle$  が存在する.任意に $x \in X\langle a \rangle$  をとる.問 14.6 と問 14.9 より、

$$f(X\langle x\rangle) = f((X\langle a\rangle)\langle x\rangle) = (Y\langle b\rangle)\langle f(x)\rangle = Y\langle f(x)\rangle$$

であるから, f の  $X\langle x\rangle$  への制限は  $X\langle x\rangle$  から  $Y\langle f(x)\rangle$  への順序同型写像である. よって,  $(x, f(x)) \in W$  であるから,  $x \in X_1$  である. 従って,  $X\langle a\rangle \subset X_1$  である. 以上で, (\*) が示された.

もし  $X_1=X$  であれば明らかに成り立つ. そこで, $X_1\neq X$  であるとしよう.  $X-X_1\neq \varnothing$  であるから,X が整列集合であることより, $a_1:=\min(X-X_1)$  が存在する.このとき, $X_1=X\langle a_1\rangle$  であることを証明する.任意に  $x\in X\langle a_1\rangle$  をとる.もし $x\in X-X_1$  ならば, $a_1$  の定め方から  $a_1\leq x$  であり, $x< a_1$  であることに矛盾する. よって, $x\in X_1$  である. ゆえに, $X\langle a_1\rangle\subset X_1$  となる. 任意に  $x\in X_1$  をとる.  $a_1\leq x$  と仮定する. もし  $x=a_1$  ならば, $x=a_1\in X-X_1$  となり, $x\in X_1$  であることに矛盾する. もし  $a_1< x$  ならば  $a_1\in X\langle x\rangle$  である. 一方, $x\in X_1$  と (\*) より, $X\langle x\rangle\subset X_1$  となる. よって, $a_1\in X\langle x\rangle\subset X_1$  となり, $a_1\in X-X_1$  であることに矛盾する. 従って, $x<a_1$ ,すなわち  $x\in X\langle a_1\rangle$  でなければならない. ゆえに, $X_1\subset X\langle a_1\rangle$  である. 以上より, $X_1=X\langle a_1\rangle$  であることが示された.

(2)(1)と全く同様にして証明される.□

以上の準備の下で、次の定理を証明する.

**定理 14.11** (整列集合の比較定理) 次の $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{0}$ のいずれか  $\mathbf{1}$  つ, しかも  $\mathbf{1}$  つだけが必ず成り立つ.

- **●** *X* と *Y* が順序同型である.
- ② ある $b \in Y$  に対し,  $X \in Y(b)$  が順序同型である.
- **3** ある  $a \in X$  に対し,  $Y \in X(a)$  が順序同型である.

**証明** (I) lacktriangle, lacktriangleのいずれかが成り立つこと:まず,  $X_1$  と  $Y_1$  が順序同型であることを証明する.写像  $f: X_1 \to Y_1$  を次のように定める.任意に  $a \in X_1$  をとる. $X_1$  の定義より,a に対し  $(a,b) \in W$  となるような  $b \in Y$  が存在する.このとき  $Y_1$  の定義から  $b \in Y_1$  であり,定理 14.8(2) よりこのような  $b \in Y$  は唯 1 つである.そこで,f(a) := b と定める.この写像  $f: X_1 \to Y_1$  が全単射であることを示す.任意に  $b \in Y_1$  をとる. $Y_1$  の定義より,b に対し  $(a,b) \in W$  となるような  $a \in X$  が存在する.このとき  $X_1$  の定義から  $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  である.よって, $a \in X_1$  である.また, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  である.よって, $a \in X_1$  である.また, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  である.また, $a \in X_1$  であり, $a \in X_1$  である.よって, $a \in X_1$  である.また, $a \in X_1$  である.第像  $a \in X_1$  が順序同型写

像であることを示す. 任意に  $a,a' \in X_1$  をとる.  $a \le a'$  であるとする. もし a = a' ならば f(a) = f(a') である. そこで, a < a' であるとする.  $a' \in X_1$  であるから, 順序同型写像  $\varphi: X\langle a'\rangle \to Y\langle f(a')\rangle$  が存在する.  $\varphi(a) \in Y\langle f(a')\rangle$  であるから  $\varphi(a) < f(a')$  であり, 問 14.6 と問 14.9 より

$$\varphi(X\langle a\rangle) = \varphi((X\langle a'\rangle)\langle a\rangle) = (Y\langle f(a')\rangle\langle \varphi(a)\rangle) = Y\langle \varphi(a)\rangle$$

となる. よって,  $X\langle a\rangle$  と  $Y\langle \varphi(a)\rangle$  は順序同型であり,  $(a,\varphi(a))\in W$  となる. 従って, f の定義より  $f(a)=\varphi(a)$  であり,  $f(a)=\varphi(a)< f(a')$  となる. ゆえに, f は順序を保つ. 同様に,  $f^{-1}:Y_1\to X_1$  も順序を保つので, f は順序同型写像である. 以上より,  $X_1$  と  $Y_1$  は順序同型である.

 $X_1$  と  $Y_1$  が順序同型であることと、定理 14.10 とを合わせると、 $\mathbf{0}$ 、 $\mathbf{2}$ 、 $\mathbf{3}$ 、もしくは、 $\mathbf{3}$  ある  $a \in X, b \in Y$  に対し、 $X\langle a \rangle$  (=  $X_1$ ) と  $Y\langle b \rangle$  (=  $Y_1$ ) が順序同型である.

のいずれかが成り立つ. もし�が成り立つとすると,  $(a,b) \in W$  となり,  $a \in X_1$  かつ $b \in Y_1$  となる. すると,  $a \in X\langle a \rangle$  かつ $b \in Y\langle b \rangle$  となり矛盾が生じる. つまり, � は決して成り立たない. 以上より, ①, ②, ③のいずれかが成り立つ.

(II)  $m{0}$ ,  $m{2}$ ,  $m{3}$ のどの2つも同時には成り立たないこと: $m{0}$ と $m{2}$ ,  $m{0}$ と $m{3}$ が同時に成り立つとすると、それぞれYと $Y\langle b \rangle$ , Xと $X\langle a \rangle$ が順序同型となる。これは定理 14.8(1) に矛盾する。 $m{2}$ と $m{3}$ が同時に成り立つとすると、 $\bf{2}$ つの順序同型写像

$$g: X \to Y\langle b \rangle, \quad h: Y \to X\langle a \rangle$$

が存在する.  $i:Y\langle b\rangle \to Y, j:X\langle a\rangle \to X$  を包含写像とすると、合成写像  $\psi:=j\circ h\circ i\circ g:X\to X$  は順序を保つ単射である. 一方、 $\psi$  の像は  $X\langle a\rangle$  に含まれるから、 $\psi(a)< a$  である. これは定理 14.7 に矛盾する. 以上より、 $\P$ 、 $\P$ 0 のどの 2 つも同時には成り立つことはない.  $\square$