平成 25 年度　理学系広域科目「集合と位相第一」

第１回レポート　解答と解説

1. 集合 A, B を次のように定める．このとき, $A = B$ であることを証明せよ．

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leqq 1\}$$

解答例　まず, $A \subset B$ を示す．$a \in A$ を任意にとる．A の定義より, a に対して

$$a = \frac{1}{x^2+1}$$

をみたすような $x \in \mathbb{R}$ が存在する．$x^2 \geqq 0$ であるから $x^2 + 1 \geqq 1$ となるので, $1/(x^2+1) \leqq 1$ である．また, $x^2 + 1 > 0$ であるから $1/(x^2+1) > 0$ である．よって, $0 < a \leqq 1$ となるので, B の定義より $a \in B$ である．

次に, $B \subset A$ を示す．$b \in B$ を任意にとる．B の定義より, $b \in \mathbb{R}$ かつ $0 < b \leqq 1$ である．$b \neq 0$ であるから $(1-b)/b$ は実数であり, $1 - b \geqq 0$ かつ $b > 0$ であるから $(1-b)/b \geqq 0$ である．そこで, $(1-b)/b$ の正の平方根を x とおく:

$$x = \sqrt{\frac{1-b}{b}}$$

すると,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1-b}{b}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\dfrac{1-b}{b} + 1} = b$$

となる．つまり, b に対して $b = 1/(x^2+1)$ をみたすような $x \in \mathbb{R}$ が存在する．よって, A の定義より $b \in A$ である．

以上より, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから, $A = B$ である．$\square$

解説・講評　問題１は２つの集合 A, B の相等を示す問題です．$A \subset B$, $A \supset B$ の証明を各３点とし, ６点満点で採点しました．概ねよくできていましたが, 両方向の包含関係を証明するということに慣れていない印象を受けました．x が実数であるときに $0 < 1/(x^2+1) \leqq 1$ が成り立つことを示して, $A = B$ という結論を述べている答案が目立ちました．実際には $A \subset B$ しか示されていないので, このままでは不十分です．また, $f(x) = 1/(x^2+1)$ とおいて $f(x)$ を微分し, 増減表を書くことによって $f(x)$ の値域が B であることを示している答案もありました．間違いではないのですが, この方法は $f(x)$ の連続性や中間値の定理を暗に用いていることになります．しかし, 中間値の定理を明記した答案はありませんでした．

2. 次の論理式が恒真式であることを示せ．ただし, P, Q, R は命題とする．

(1) $(\neg P \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))) \Rightarrow P$　　(2) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

解答例１　命題 $P, Q, R, \ldots$ の真偽に関わらず常に真である命題を $\top$, 常に偽である命題を $\bot$ で表す. 真理表において, $\top$ の値は常に 1 であり, $\bot$ の値は常に 0 である. 恒真式とは, $\top$ と同値 (真偽が一致する) な論理式のことであるから, 基本的な論理式の同値を組み合わせることにより, 与えられた論理式が $\top$ と同値であることを示せばよい.

(1) 次のような変形を行うことにより, 与式が恒真式であることが示される.

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))) \Rightarrow P \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(\neg P \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))) \vee P \\
\Longleftrightarrow \quad & \neg(\neg\neg P \vee (Q \wedge (\neg Q))) \vee P \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(P \vee (Q \wedge (\neg Q))) \vee P \\
\Longleftrightarrow \quad & (\neg P \vee \neg(Q \wedge (\neg Q))) \vee P \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg P \vee \neg\bot) \vee P \\
\Longleftrightarrow \quad & (\neg P \vee \top) \vee P \quad \Longleftrightarrow \quad \neg P \vee P \quad \Longleftrightarrow \quad \top
\end{aligned}
$$

(2) 次のような変形を行うことにより, 与式が恒真式であることが示される.

$$
\begin{aligned}
& ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
\Longleftrightarrow \quad & \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R)) \vee (P \Rightarrow R) \\
\Longleftrightarrow \quad & \neg((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\Longleftrightarrow \quad & (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(Q \wedge R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\Longleftrightarrow \quad & ((\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee \neg R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\Longleftrightarrow \quad & ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee \neg R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee ((\neg Q \vee \neg R) \vee (\neg P \vee R)) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee (\neg R \vee (\neg P \vee R))) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee (\neg P \vee (\neg R \vee R))) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee (\neg P \vee \top)) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee \top) \\
\Longleftrightarrow \quad & (P \wedge \neg Q) \vee \top \\
\Longleftrightarrow \quad & \top
\end{aligned}
$$

解答例２　真理表を作成して与式の真偽を調べる.

(1) 次の真理表により, 与式は恒真式である.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \wedge \neg Q$	$\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	$(\neg P \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))) \Rightarrow P$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

(2) 次の真理表により, 与式は恒真式である.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \wedge R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R)$	$P \Rightarrow R$	与式
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

解説・講評　問題２は与えられた論理式が恒真式であることを示す問題です．(1), (2) を各３点とし，６点満点で採点しました．(1), (2) ともよくできていました．解答例１では, $P \Rightarrow Q \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$, $P \Rightarrow P$, 二重否定, 冪等律, 交換律, 結合律, 分配律, ド・モルガンの法則など, 基本的な恒真式を組合せることによって与式が恒真式であることを示します. 解答例１のように, $\top$, $\bot$ という記号 (命題定数といいます) を用いると, $P \vee \top \Longleftrightarrow \top$, $\neg\bot \Longleftrightarrow \top$ などが使えて便利です. いろいろな変形の方法があるので様々な答案がありましたが, 正しい推論を行っているものが多かったと思います. 解答例２のように, 真理表を書いて与式が恒真式であることを示した答案も多く, ほとんどが正解でした. 命題論理は皆さんに敬遠されるかもしれないと思っていたのですが, 私の杞憂だったようです.

3. X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする. A_1, A_2 を X の部分集合とするとき, (1), (2) を証明せよ. また, (3), (4) が成り立たないような例を挙げよ.

(1) $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$　　(2) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$

(3) $f(A_1) - f(A_2) \supset f(A_1 - A_2)$　　(4) $A_1 \supset f^{-1}(f(A_1))$

解答例　(1) 任意に $y \in f(A_1) - f(A_2)$ をとる. 差集合の定義より, $y \in f(A_1)$ かつ $y \notin f(A_2)$ である. $y \in f(A_1)$ であるから, $f(x) = y$ となる $x \in A_1$ が存在する. もし $x \in A_2$ ならば, $y = f(x) \in f(A_2)$ となり, $y \notin f(A_2)$ であることに矛盾する. 従って, $x \notin A_2$ である. よって, $x \in A_1 - A_2$ となり, $y = f(x) \in f(A_1 - A_2)$ となる. ゆえに, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ である.

(2) 任意に $x \in A_1$ をとる. $f(x) \in f(A_1)$ であるから, x の f による像は $f(A_1)$ に含まれる. すなわち, $x \in f^{-1}(f(A_1))$ である. ゆえに, $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$ である.

(3) $X := \{1, 2\}$, $Y := \{3\}$ とし, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) := 3, f(2) := 3$ と定める. $A_1 := \{1\}$, $A_2 := \{2\}$ とおく. このとき, $A_1 - A_2 = \{1\} - \{2\} = \{1\}$ であるから, $f(A_1 - A_2) = f(\{1\}) = \{3\}$ である. 一方, $f(A_1) = f(\{1\}) = \{3\}, f(A_2) = f(\{2\}) = \{3\}$ であるから, $f(A_1) - f(A_2) = \{3\} - \{3\} = \varnothing$ である. よって, この場合は $f(A_1) - f(A_2) \supset f(A_1 - A_2)$ ではない.

(4) $X := \{1,2\}$, $Y := \{3\}$ とし, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) := 3, f(2) := 3$ と定める. $A_1 := \{1\}$ とおく. このとき, f の定義から, $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{3\}) = \{1,2\}$ となる. よって, この場合は $A_1 \supset f^{-1}(f(A_1))$ ではない. □

解説・講評　問題３は写像の像と逆像に関する論証問題です. (1), (2), (3), (4) を各２点とし, ８点満点で採点しました. よくできていました. (1) の答案の中には議論があやしいものも散見されました. そのような答案も大筋が合っていれば正解としました. 解答例などを参考にして復習することをお薦めします. また, 写像による部分集合の逆像と逆写像とを混同している人もいました. どちらも同じ記号で表されるので紛らわしいのですが, 異なる概念なので明確に区別する必要があります.

参考　問題２の (2) では, 実は別の恒真式を出題するつもりでした. それは三段論法と呼ばれるものです. 実際の出題では誤って上の論理式を書いてしまいましたが, 調べてみると恒真式になっていたので, 訂正をせずそのままにしました. もともと出題するはずであった問題とその解答例を以下に記します.

問題　P, Q, R を命題とするとき, $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ が恒真式であることを示せ.

解答例　次のような変形を行うことにより, 与式が恒真式であることが示される.

$$
\begin{aligned}
& ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
\iff\ & \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee (P \Rightarrow R) \\
\iff\ & \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & ((\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)) \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee R)) \\
\iff\ & ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee ((Q \vee R) \wedge (\neg R \vee R)) \\
\iff\ & (\top \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee ((Q \vee R) \wedge \top) \\
\iff\ & (\neg Q \vee \neg P) \vee (Q \vee R) \\
\iff\ & (\neg Q \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & \top \vee (\neg P \vee R) \\
\iff\ & \top
\end{aligned}
$$

もちろん, 真理表を書くことによって与式が恒真式であることを証明することもできる. □

2013 年 5 月 23 日 (木)