

東京工業大学大学院 経営工学専攻

2013/5/31

年金数理第8回

財政方式2

講師 : 渡部善平((株)IICパートナーズ)

第8回の目的

- 引き続き典型的な財政方式の計算を理解する
 - ◆ 単位積立方式
 - ◆ 加入年齢方式

心がけてほしいこと

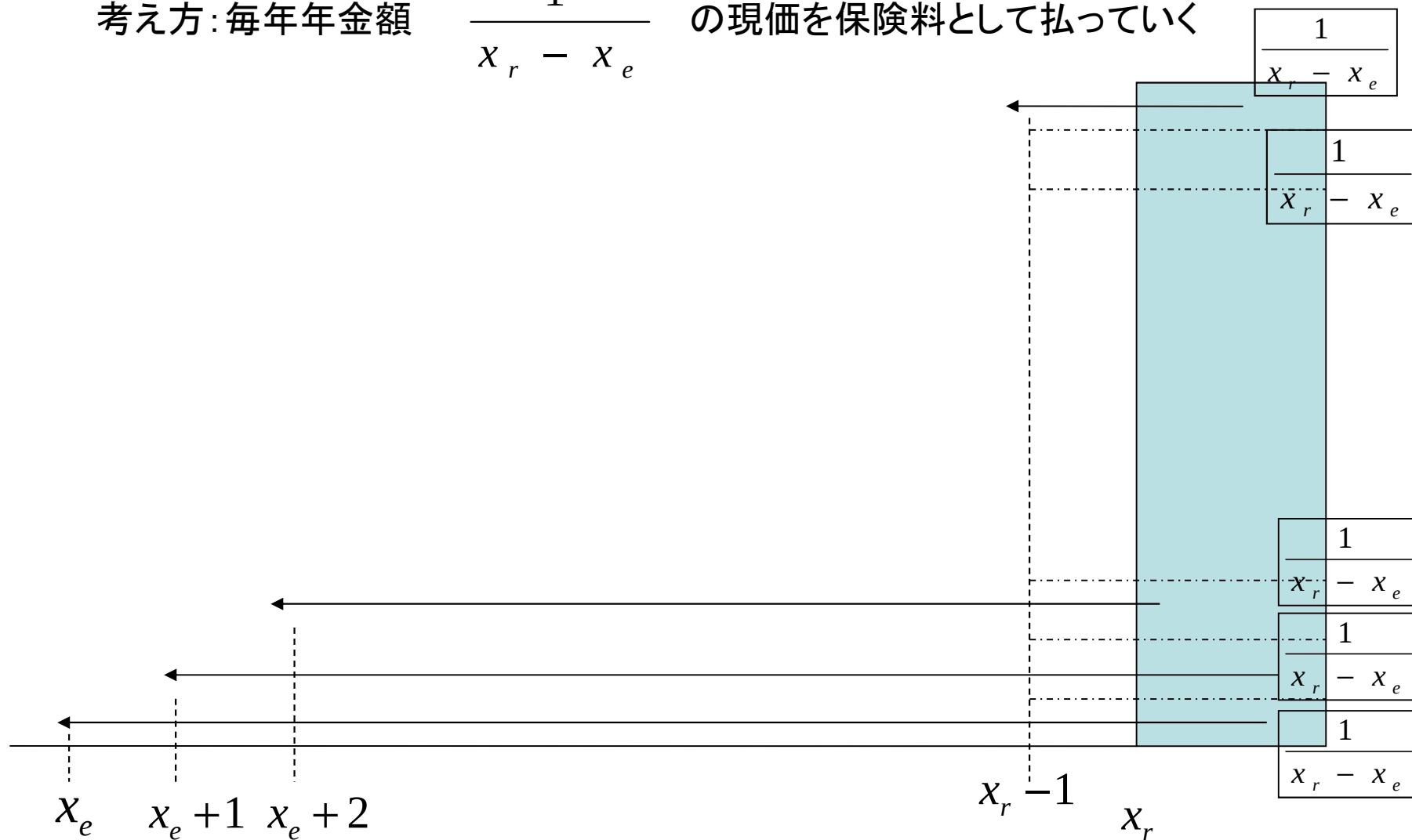
- 算式を用いた定義の意味を頭に叩き込む
- その定義を覚える
- 算式の展開を我慢強く行うことをいとわない
- 数種類の算式表現を自由自在にできるようにする
- 同時にそれらが何を意味するかを考える
- ひとに説明するつもりで反芻する
- 実際の数値にあてはめて計算する

(Excel sheetの有効活用)

単位積立方式

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

考え方: 毎年年金額 $\frac{1}{x_r - x_e}$ の現価を保険料として払っていく



単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

考え方: 毎年年金額 $\frac{1}{x_r - x_e}$ の現価を保険料として払っていく

X歳の加入者1人あたりに毎年要する掛金
制度全体の掛金

$${}^U P_x = \left(\frac{1}{x_r - x_e} \right) \cdot \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r - x}}{l_x^{(T)}} \right)$$

$${}^U C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^U P_x = \left(\frac{1}{x_r - x_e} \right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{l_x^{(T)}} \right) v^{x_r - x} = \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{x_r - x}$$

$${}^U C / d = ({}^U C \text{の現在加入者分収入現価}) + ({}^U C \text{の将来加入者分収入現価})$$

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

単位積み立て方式の年金資産の積立水準を求めてみよう

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

$${}^U C / d = ({}^U C \text{の現在加入員分収入現価}) + ({}^U C \text{の将来加入員分収入現価})$$

現在加入者分収入現価

$$\begin{aligned} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x}^{x_r-1} {}^U P_X l_X^{(T)} v^{X-x} &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x}^{x_r-1} \frac{1}{x_r - x_e} \frac{l_{x_r}}{l_X^{(T)}} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X} l_X^{(T)} v^{X-x} \\ &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x}^{x_r-1} \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x} \end{aligned}$$

これは、現在加入者の給付現価のうち将来期間分 S^a_{FS} に相当するものである

前回34ページ参照

$$\text{すなわち現在加入者分収入現価} = S^a_{FS}$$

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

ここで現在加入者の責任準備金は

現在加入者の給付現価 － 現在加入者の収入現価
すなわち

$$S^a - \text{現在加入者の収入現価} = S_{PS}^a + S_{FS}^a - S_{FS}^a = S_{PS}^a$$

つまり単位積立方式における現在加入者の責任準備金は、
過去分の給付現価に等しい

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

なお、過去分の給付現価はつぎのように展開できる

$$\begin{aligned}
 S_{PS}^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x - x_e}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x_e}^{x-1} \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x} \\
 &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x_e}^{x-1} \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X} v^{X-x} \\
 &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x_e}^{x-1} \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X} (1+i)^{x-X} \\
 &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x_e}^{x-1} \frac{1}{x_r - x_e} \frac{l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X}}{l_X^{(T)}} l^{(T)} (1+i)^{x-X} \\
 &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x_e}^{x-1} {}^U P_X l_X^{(T)} (1+i)^{x-X}
 \end{aligned}$$

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

ここで

$$\sum_{X=x_e}^{x-1} {}^U P_X l_X^{(T)} (1+i)^{x-X} = A_x$$

これは現在 x 歳の加入者が加入から積み立てた掛金の今までの元利合計であることがわかる

$$S_{PS} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} A_x$$

であるから、過去分の給付現価は、現在加入者の掛金の元利合計の総合計になる

なお、excel sheetでは

$$A_x = A_{x-1} (1+i) + {}^U P_{x-1} l_{x-1}^{(T)} (1+i)$$

の漸化式を利用している

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

${}^U C / d = ({}^U C \text{の現在加入者分収入現価}) + ({}^U C \text{の将来加入者分収入現価})$

であるが、ここで将来加入者分収入現価分については次の通り:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(\sum_{X=x_e}^{x_r-1} {}^U P_X l_X^{(T)} v^{X-x_e} \right) &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(\sum_{X=x_e}^{x_r-1} \frac{1}{x_r - x_e} \frac{l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X}}{l_X^{(T)}} l_X^{(T)} v^{X-x_e} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(\sum_{X=x_e}^{x_r-1} \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-X} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{1}{x_r - x_e} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e} (x_r - x_e) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t (l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}) = {}^f S \quad (\text{前回P34}) \end{aligned}$$

これは、将来加入者の給付現価に相当するものである

一方、P8より現在加入者分の収入現価は現在加入者の将来分の給付現価であったから、

$${}^U C / d = S_{FS}^a + S^f$$

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

$$\begin{aligned} F &= B/d - {}^U C/d = S^p + S^a + S^f - {}^U C/d \\ &= S^p + S_{PS}^a + S_{FS}^a + S^f - (S^f + S_{FS}^a) \\ &= S^p + S_{PS}^a \end{aligned}$$

すなわち、単位積立方式の年金資産(結局責任準備金)は、年金受給者の給付現価および現在加入者の収入現価のうち過去勤務分に相当するものを足したものに等しい

年金受給者の年金現価と年金資産の関係

定年を迎えた加入者に関して、年金受給開始時に年金現価に等しい年金資産を積み立てていれば、その後の各年齢における年金資産の残高は、その年齢における年金現価に等しい。

証明

数学的帰納法による。年金開始年齢ではあきらか。

ある年齢(x)でこれが成立していたとする: 年金資産残高 = 年金現価 $l_x \ddot{a}_x$

$$\text{今、 } l_x \ddot{a}_x = l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \cdots + l_{\omega}v^{\omega-x} \quad \text{より}$$

年齢(x)で給付を支払ったあとの、1年後の残高を計算すると、

$$(l_x \ddot{a}_x - l_x)(1+i) = l_{x+1} + l_{x+2}v + \cdots + l_{\omega}v^{\omega-(x+1)} = l_{x+1} \ddot{a}_{x+1}$$

これは、年齢(x+1)歳における年金現価に等しい。

証明終

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

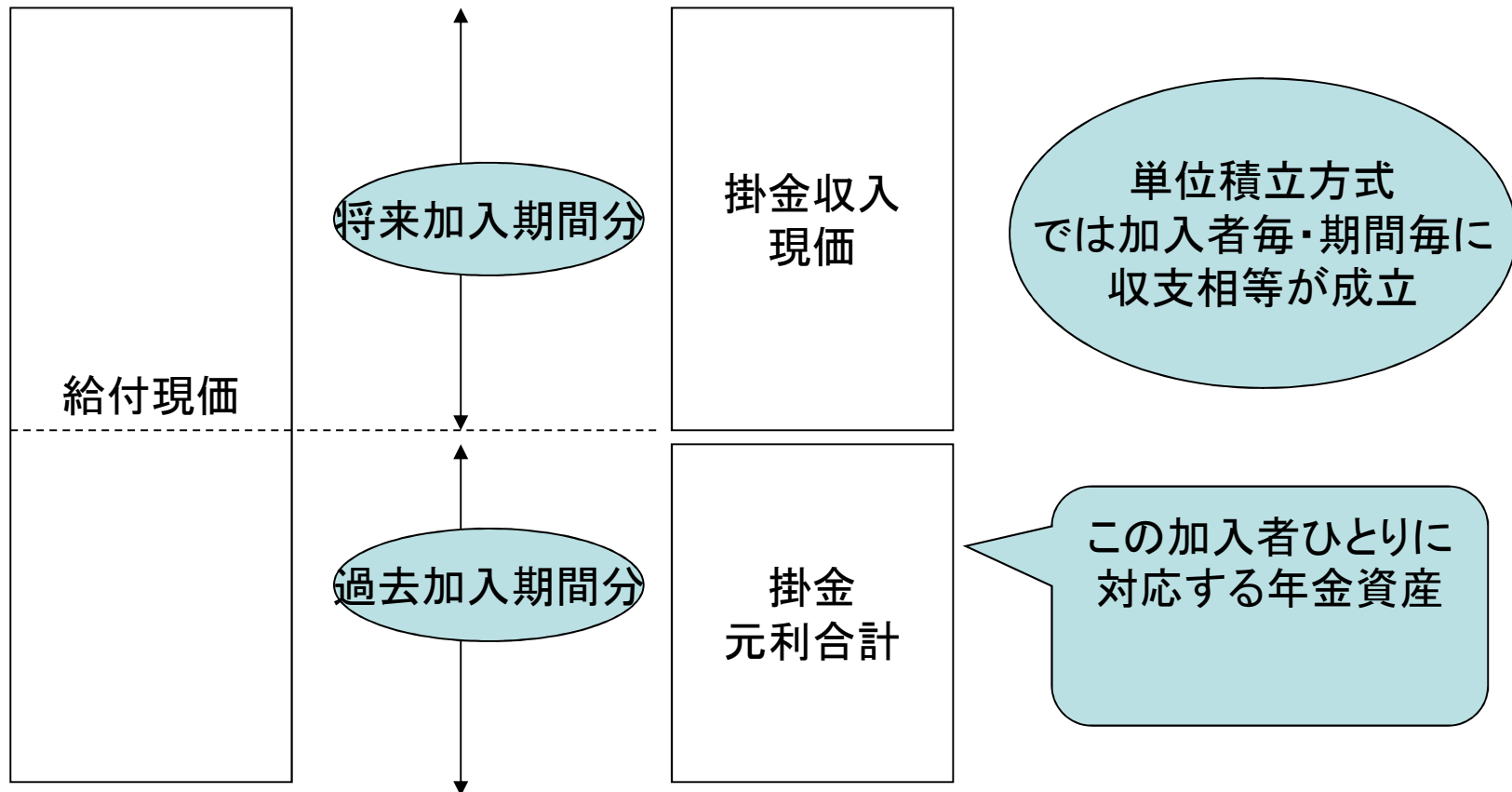
結局、単位積立方式のもとでは

	給付現価	マイナス	収入現価	=	責任準備金
年金受給者	S^p	マイナス	0	=	S^p P14より年金資産にも等しい
現在加入者	S^a	マイナス	S_{FS}^a	=	S_{PS}^a これは現在加入者の掛金元利合計でもある
将来加入者	S^f	マイナス	S^f これは現在加入者の掛金収入現価でもある	=	0
合計	S	マイナス	${}^U C / d$	=	$S^p + S_{PS}^a$

これは年金資産でもある

単位積立方式 (Unit Credit Method, Accrued Cost Method)

現在加入者(ひとりあたり)の給付現価・掛金収入現価・掛金元利合計の関係



単位積立方式を考える意義

- 実務的には主流ではないが、
 - 勤続に伴って発生した給付の現価を積み立てると
いう、自然な考え方

加入年齡方式

Trowbridgeモデルにおける人数現価

$$\text{人数現価} \quad 1 \quad (G)$$

掛金を毎年一人あたり1ずつ払い込んでいく場合の掛金収入現価

(すなわち、人数現価にひとりあたりの掛金を乗ずれば掛金収入現価がでる)

: 単位掛金現価ともいうべきもの

一人当たりの掛金が一定の制度の事前積立方式の場合に使い勝手がある

(つまり事前積立制度であっても単位積立方式ではこの概念は使えない)

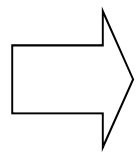
Trowbridgeモデルにおける人数現価

人数現価 2 加入者の人数現価 (G^a)

現在 x 歳の加入者一人が将来掛金を1ずつ払う場合の現価

X 歳開始有期年金
現価率

$$1 + \frac{l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}v + \frac{l_{x+2}^{(T)}}{l_x^{(T)}}v^2 + \dots + \frac{l_{x_r-1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}v^{x_r-1-x} = \frac{\sum_{X=x}^{x_r-1} l_X v^{X-x}}{l_x^{(T)}}$$



加入者全体では

$$G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{X=x}^{x_r-1} l_X v^{X-x}}{l_x^{(T)}} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x}^{x_r-1} l_X v^{X-x}$$

Trowbridgeモデルにおける給付現価及び人数現価等

人数現価 3

将来加入者の人数現価 (G^f)

新規加入年齢 x_e 歳時点の人数現価を翌期始以降、永久に見込んだもの

$$G^f = \left(\frac{v}{d} \right) \cdot \sum_{X=x_e}^{x_r-1} l_X v^{X-x_e}$$



1年あたり

Trowbridgeモデルにおける給付現価及び人数現価等

人数現価 4

上記の①②を合計したものが制度全体の人数現価 G

$$G = G^a + G^f$$

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

制度加入から定年まで平準的(一人当たりの金額が一定)に掛金を積立て、年金開始時にちょうど必要原資が積み立てられるように掛金額を決定

掛金額の求め方

$${}^E P \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} (1+i)^{x_r-x} \right) = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

これを、年齢 x_e 歳時における現価で考えると左辺は

$${}^E P \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} (1+i)^{x_r-x} \right) v^{x_r-x_e} = {}^E P \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}$$

右辺は $l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}$

これらが等しいので
$${}^E P \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e} = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}$$

加入年齢方式 (Entry Age Normal Cost Method)

よって

$${}^E P = \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r - x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}}$$

また

$$S^f / G^f = \left\{ \left(\frac{v}{d} \right) \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r - x_e} \right\} / \left\{ \left(\frac{v}{d} \right) \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x v^{x-x_e} \right\}$$

$$= \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r - x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}} = {}^E P \quad (\text{前回P33および今回P21より})$$

より

$${}^E P = S^f / G^f \quad {}^E P G^f = S^f$$

が成立。

したがって将来加入者のみで収入現価と給付現価が等しくなるように将来加入者ひとりあたりの保険料を決めたものに、 ${}^E P$ は等しくなっている。

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

現在加入者にかかる責任準備金は給付現価から収入現価を引いてつぎのようになる：

$$S^a - {}^E P \cdot G^a$$

$$\begin{aligned} S^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{l_{x_r} \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}}{\sum_{X=x_e}^{x_r-1} l_X^{(T)} v^{X-x_e}} \cdot \sum_{X=x_e}^{x_r-1} l_X^{(T)} v^{X-x} \\ &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^E P \left(\sum_{X=x_e}^{x_r-1} l_X^{(T)} v^{X-x} \right) \\ &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} ({}^E P \left(\sum_{X=x_e}^{x-1} l_X^{(T)} (1+i)^{x-X} \right) + {}^E P \left(\sum_{X=x}^{x_r-1} l_X^{(T)} v^{X-x} \right)) \end{aligned}$$

第1項のΣの中：年齢群団x歳の現在加入者が入社から現在まで積み立ててきた掛金の元利合計

第2項のΣの中：年齢群団x歳の現在加入者が現在から定年時まで積み立てる掛金の収入現価

つまり現在加入者の給付現価は、掛金の元利合計と収入現価の和(この関係は単位積立方式でも同じであった)

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

現在加入者にかかる責任準備金は給付現価から収入現価を引いてつぎのようになる：

$$S^a - {}^E P \cdot G^a$$

$${}^E P \cdot G^a = {}^E P \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{X=x}^{x_r-1} l_X v^{X-x}$$

この最初のシグマで囲われた項は、年齢群団 X 歳の現在加入者が現在から定年時まで積み立てる掛金の収入現価をあらわす。

収入現価合計はそれら年齢 X に関する総和になる。

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

現在加入者にかかる責任準備金は給付現価から収入現価を引いてつぎのようになる：

$$S^a - {}^E P \cdot G^a$$

S^a 現在加入者の掛金の元利合計+掛金収入現価(P24)

$${}^E P \cdot G^a$$

現在加入者の掛金の収入現価

$$S^a - {}^E P \cdot G^a$$

上記より、現在加入者の掛金の元利合計になる

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

一方、すでに年金受給者になっているものに支払う原資として必要な年金資産は、年金受給者分の給付現価であり

$$\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x = S^P$$

これは、P14より年金資産にも等しい

したがって、加入者および年金受給者全体の責任準備金は、結局加入者の掛金元利計および年金受給者の年金資産の合計(=すなわち年金資産額)に等しくなる。

一方将来加入者に関しては、給付現価と収入現価が一致しているので責任準備金はゼロ、また年金資産もゼロなので結局、将来加入者、現在加入者、年金受給者全体で年金資産と責任準備金が等しいことがわかる

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

結局、加入年齢方式のもとでは

	給付現価	マイナス	収入現価	=	責任準備金
年金受給者	S^p	マイナス	0	=	S^p P14より年金資産にも等しい
現在加入者	S^a	マイナス	${}^E P G^a$	=	現在加入者の掛金元利合計
将来加入者	S^f	マイナス	${}^E P G^f (= S^f)$	=	0
合計	S	マイナス	${}^E P (G^f + G^a)$	=	S^p + 現在加入者の掛金元利合計

これは年金資産(現在加入者が積み立てた分+年金受給者のための年金資産)でもある

加入年齢方式(Entry Age Normal Cost Method)

加入年齢方式に基づく掛金額を毎年(同額ずつ)積み立てていく場合に極限方程式が成立するための積立水準を検証してみる。

$$B / d = S^p + S^a + S^f$$

$$B / d = {}^E C / d + F = S^f + {}^E P G^a + F$$

これより

$$F = S^p + S^a - {}^E P G^a$$

これは加入年齢方式において成立している年金資産＝責任準備金の関係式

単位積立方式と加入年齢方式比較

$${}^U C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^U P_x = \left(\frac{1}{x_r - x_e} \right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{l_x^{(T)}} \right) v^{x_r-x} = \left(\frac{l_{x_r}^{(T)} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{x_r-x}$$

P6より

$${}^E C = {}^E P \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} = \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \quad \text{P24より}$$

住宅ローンの返済で言えば、元利均等返済(＝加入年齢方式)と、負債額を返済時期別に均等分割してその現価を返していく場合の比較

(年金制度の場合は、毎年的人数が減少していく要素が加わる)

単位積立方式と加入年齢方式比較

$${}^U C = \left(\frac{l_{x_r}^{(T)} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{x_r-x} = l_{x_r}^{(T)} \cdot \ddot{a}_{x_r} \frac{v^{x_r-x_e} + v^{x_r-x_e-1} + \dots + v^2 + v}{1+1+\dots+1}$$

$${}^E C = {}^E P \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} = \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}$$

$$= l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \frac{(l_{x_e}^{(T)})v^{x_r-x_e} + (l_{x_e+1}^{(T)} \cdot v)v^{x_r-x_e-1} + \dots + (l_{x_r-1}^{(T)} \cdot v^{x_r-1-x_e})v}{l_{x_e}^{(T)} + l_{x_e+1}^{(T)} \cdot v + \dots + l_{x_r-1}^{(T)} \cdot v^{x_r-1-x_e}}$$

$$\frac{v^{x_r-x_e} + v^{x_r-x_e-1} + \dots + v^2 + v}{1+1+\dots+1} \quad \text{は} \quad v^{x_r-x_e}, v^{x_r-x_e-1}, \dots, v^2, v \quad \text{の単純平均} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{(l_{x_e}^{(T)})v^{x_r-x_e} + (l_{x_e+1}^{(T)} \cdot v)v^{x_r-x_e-1} + \dots + (l_{x_r-1}^{(T)} \cdot v^{x_r-1-x_e})v}{l_{x_e}^{(T)} + l_{x_e+1}^{(T)} \cdot v + \dots + l_{x_r-1}^{(T)} \cdot v^{x_r-1-x_e}} \quad \text{は} \quad v^{x_r-x_e}, v^{x_r-x_e-1}, \dots, v^2, v \quad \text{の重み付き平均}$$

単位積立方式と加入年齢方式比較

重みである $l^{(T)}_{x_e+t} \cdot v^t$ は t の減少関数

したがって①を $v^{x_r-x_e-t_U}$ ②を $v^{x_r-x_e-t_E}$ とすると

$t_E < t_U$ $v^{x_r-x_e-t}$ は t の増加関数だから

$$v^{x_r-x_e-t_E} < v^{x_r-x_e-t_U}$$

したがって

$${}^U C > {}^E C$$

したがって逆に

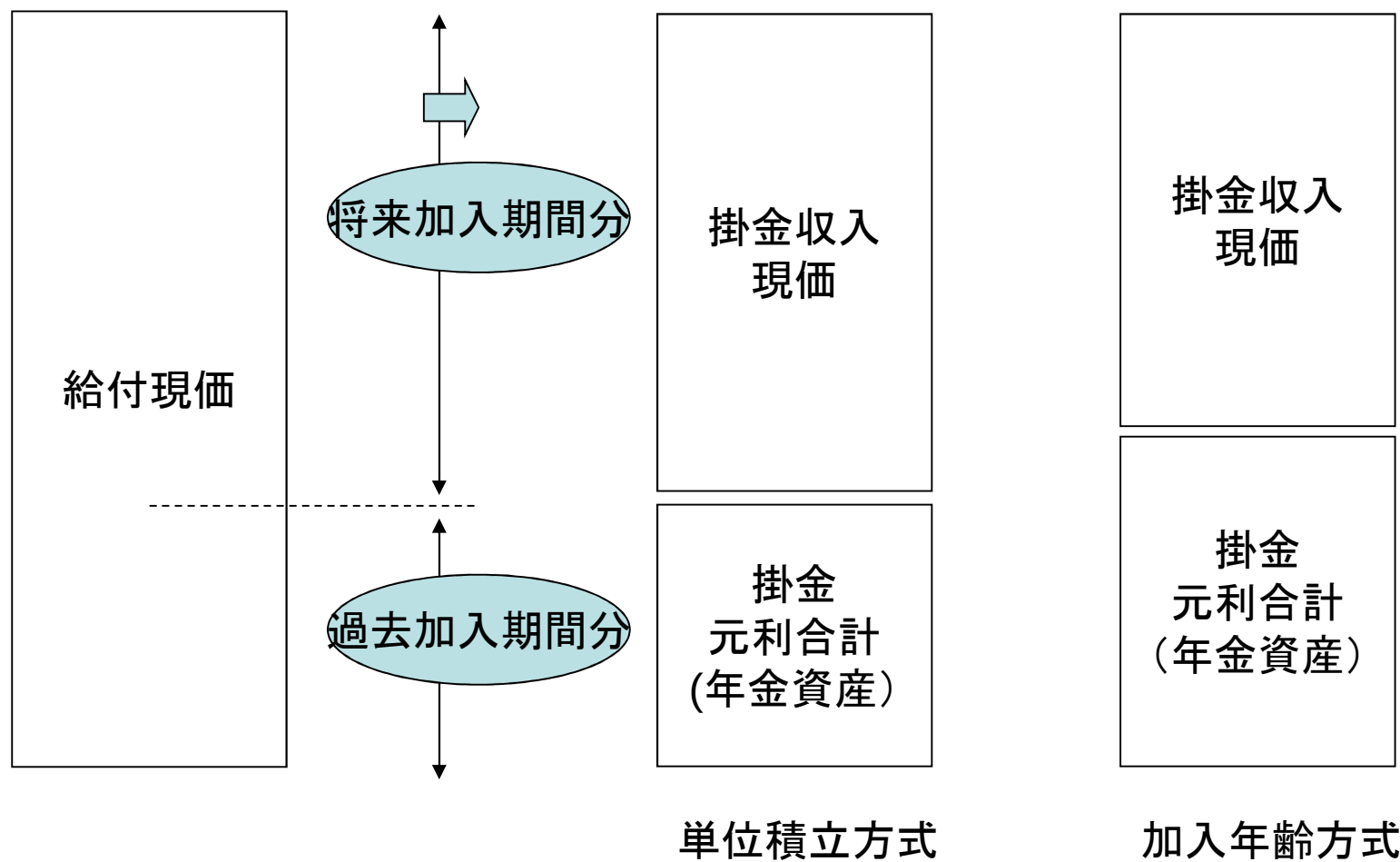
単位積立方式の年金資産水準は加入年齢方式の年金
資産水準より低い

単位積立方式と 加入年齢方式比較

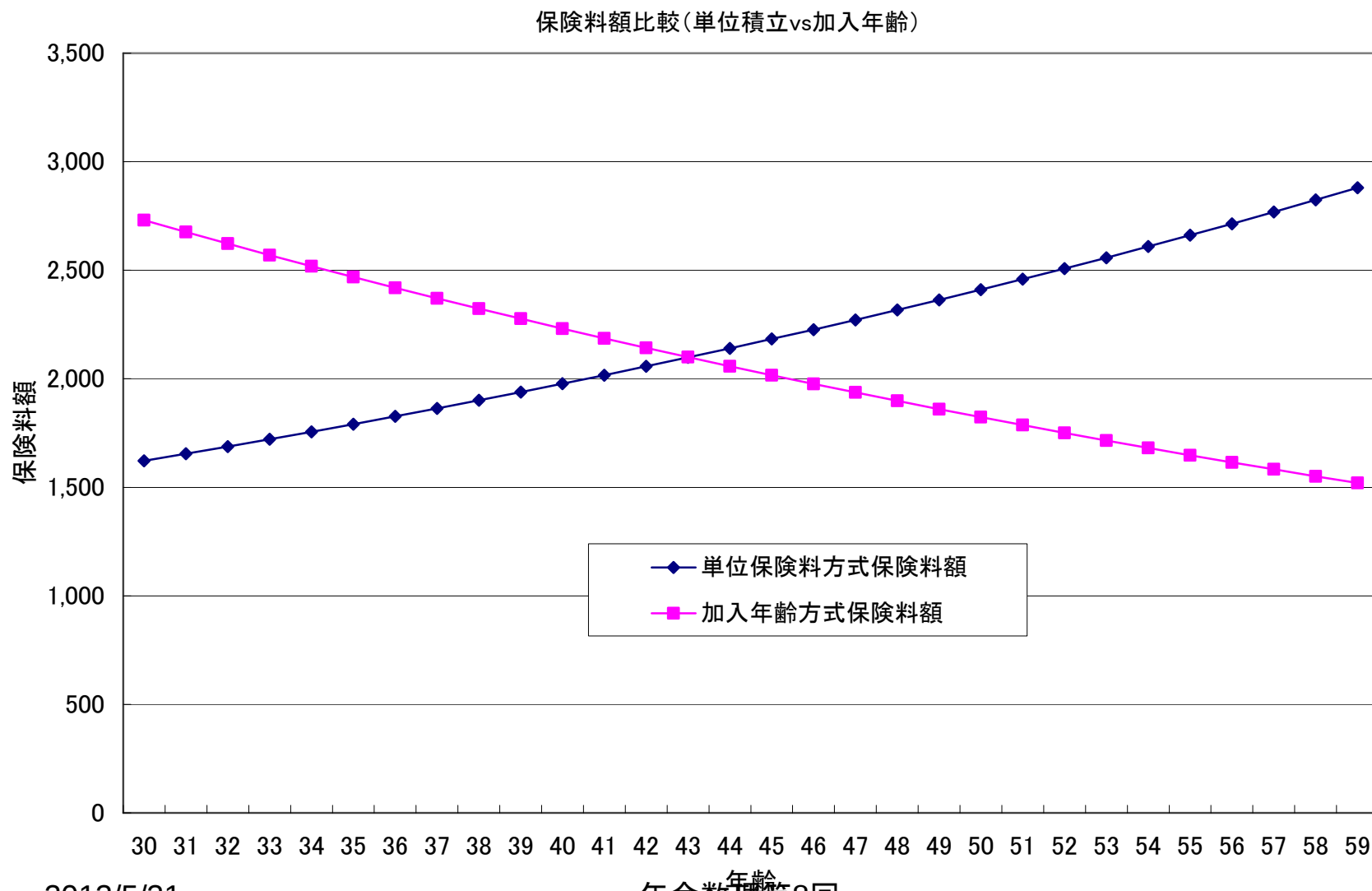
項目	単位積立方式	加入年齢方式
掛金	${}^U C = l_{x_r}^{(T)} \cdot \ddot{a}_{x_r} \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{x_r-x}}{x_r - x_e}$	${}^E C = \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v^{x_r-x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} v^{x-x_e}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}$
年金資産 (責任準備金)	$F = S^p + S_{PS}^a$	$F = S^p + S^a - {}^E P G^a$
(1年あたり)給付額	103,790	103,790
年金受給者給付現価	974,202	974,202
現在加入者給付現価	1,934,656	1,934,656
掛金額	64,489	60,815
年金資産額	2,004,399	2,191,743

加入年齢方式と単位積立方式

現在加入者（ひとりあたり）の給付現価・掛金収入現価・掛金元利合計の関係

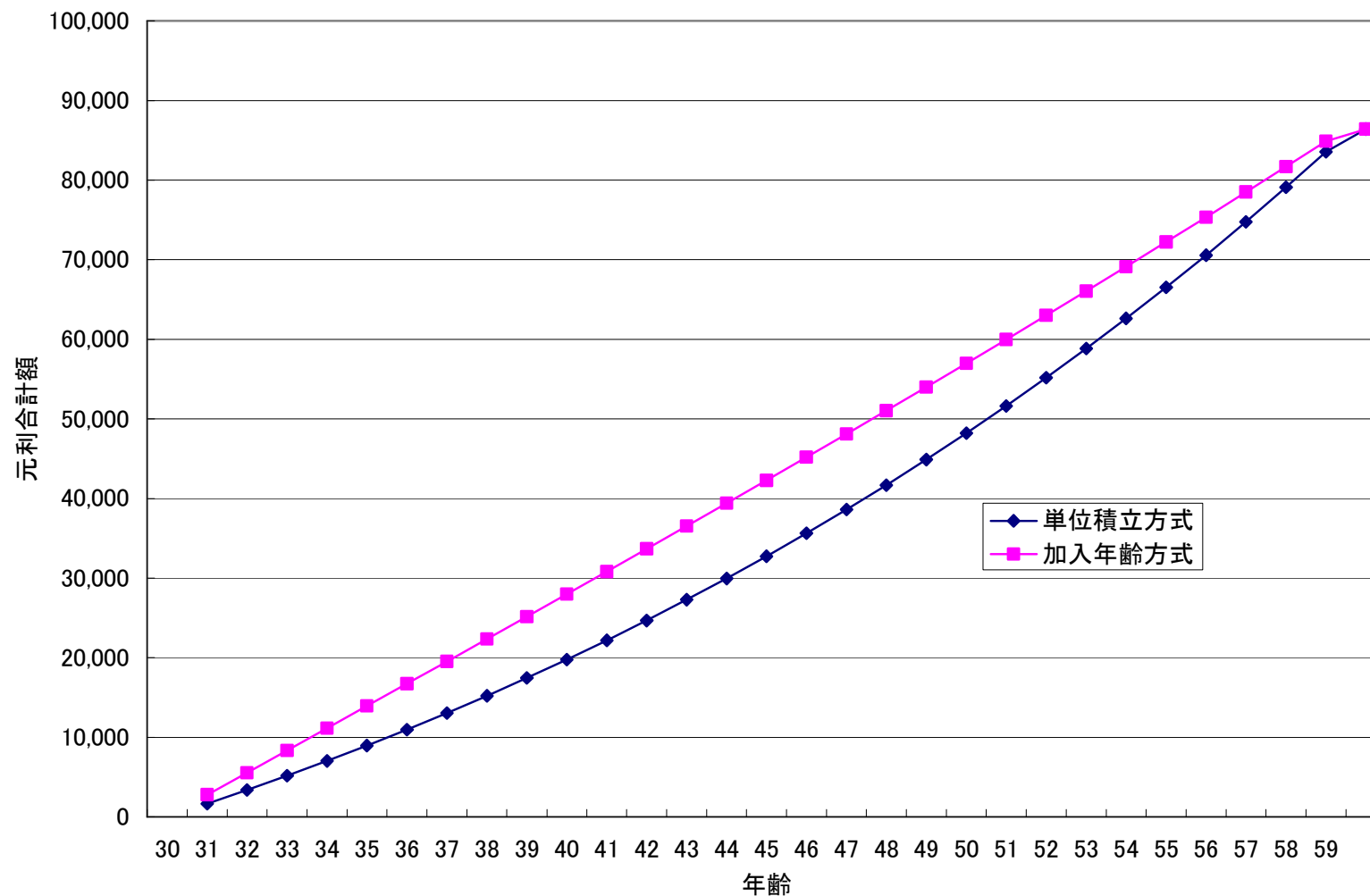


単位積立方式と加入年齢方式比較



単位積立方式と加入年齢方式比較

保険料元利合計比較



質問(講義の内容およびアクチュアリーの場合でもOK) は
つぎのメールアドレスおよび電話へ

株式会社IICパートナーズ

渡部 善平

電話 : 03-5501-3795(直通)