

原子炉理論 第6回 (原子炉の1群拡散理論(2))

講義ノート

東京工業大学 小原 徹

5.2 一般的な裸の原子炉に対する臨界条件

中性子が再び戻ってこない表面でかこまれた真空境界条件を持つ一様な組成の裸の原子炉を考える。

原子炉が臨界ならば,中性子束 $\phi(\mathbf{r})$ は次の式を満たす。

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) = v\Sigma_f\phi(\mathbf{r}) \quad \dots (1)$$

境界条件： $\phi(\tilde{\mathbf{r}}_s) = 0$ $\tilde{\mathbf{r}}_s$: 補外境界

(1)式を $-D$ で割ると,

$$\nabla^2\phi + \left(\frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}\right)\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \dots (2)$$

境界条件： $\phi(\tilde{\mathbf{r}}_s) = 0$

すなわち

$$\nabla^2\phi + \left(\frac{k_\infty - 1}{L^2}\right)\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \dots (3)$$

境界条件： $\phi(\tilde{\mathbf{r}}_s) = 0$

この方程式は,以下の空間固有値方程式と同等である。

$$\nabla^2\psi_n + B_n^2\psi_n(\mathbf{r}) = 0 \quad \dots (4)$$

境界条件： $\psi(\tilde{\mathbf{r}}_s) = 0$

原子炉が臨界である条件は,平板の原子炉の時と同様に

$$B_m^2 \equiv \left(\frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}\right) = B_1^2 \equiv B_g^2 \quad \dots (5)$$

臨界中性子束分布 $\phi(\mathbf{r})$ は,基本固有関数 $\phi_1(\mathbf{r})$ で与えられる。

種々の裸の原子炉の幾何学的バックリングと中性子束分布		
裸の炉心の形状	幾何学的バックリング	中性子束分布
平板（厚さ a ）	$\left(\frac{\pi}{\tilde{a}}\right)^2$	$\cos \frac{\pi x}{\tilde{a}}$
球（半径 R ）	$\left(\frac{\pi}{\tilde{R}}\right)^2$	$r^{-1} \sin\left(\frac{\pi r}{\tilde{R}}\right)$
直方体	$\left(\frac{\pi}{\tilde{a}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\tilde{b}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\tilde{c}}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{\tilde{a}}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{\tilde{b}}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{\tilde{c}}\right)$

(4)式は臨界原子炉の中性子束分布の形を与えるだけ。

中性子束の大きさは炉心で発生する全出力

$$P = \int_V d^3r w_f \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad \dots (6)$$

w_f ：核分裂あたりの有効エネルギー

によって決定される。

5.3 反射体付原子炉

両端に厚さ b の非増倍物質からなる反射体を付けた平板原子炉を考える。

時間に依存しない拡散方程式 ($x \geq 0$)

$$\text{炉心：} -D^C \frac{d^2 \phi^C}{dx^2} + (\Sigma_a^C - \nu \Sigma_f^C) \phi^C(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \quad \dots (7)$$

$$\text{反射体：} -D^R \frac{d^2 \phi^R}{dx^2} + \Sigma_a^R \phi^R(x) = 0, \quad \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} + \tilde{b} \quad \dots (8)$$

境界条件

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \phi^C\left(\frac{a}{2}\right) = \phi^R\left(\frac{a}{2}\right) \\ \text{(b)} \quad & J^C\left(\frac{a}{2}\right) = J^R\left(\frac{a}{2}\right) \\ \text{(c)} \quad & \phi^R\left(\frac{a}{2} + \tilde{b}\right) = 0 \end{aligned} \quad \dots (9)$$

炉心における一般解（対称性を考慮）

$$\phi^C(x) = A^C \cos B_m^C x$$

$$\text{ただし, } B_m^C{}^2 = \frac{v\Sigma_f^C - \Sigma_a^C}{D^C} \quad \dots (10)$$

反射体における,境界条件（c）を満たす解

$$\phi^R(x) = A^R \sinh \left[\frac{\frac{a}{2} + \tilde{b} - x}{L^R} \right] \quad \dots (11)$$

$$\text{ただし, } L^R = \sqrt{\frac{D^R}{\Sigma_a^R}}$$

境界条件（a）から,

$$A^C \cos \left(\frac{B_m^C a}{2} \right) = A^R \sinh \left(\frac{\tilde{b}}{L^R} \right) \quad \dots (12)$$

境界条件（b）から,

$$D^C B_m^C A^C \sin \left(\frac{B_m^C a}{2} \right) = \frac{D^R}{L^R} A^R \cosh \left(\frac{\tilde{b}}{L^R} \right) \quad \dots (13)$$

(13)式を(12)式で割ると,

$$D^C B_m^C \tan \left(\frac{B_m^C a}{2} \right) = \frac{D^R}{L^R} \coth \left(\frac{\tilde{b}}{L^R} \right) \quad \dots (14)$$

(14)式はこの原子炉の臨界条件となっている。(cf. 裸炉心 $B_m^2 = B_g^2$)

(14)式を変形して

$$\left(\frac{B_m^C a}{2} \right) \tan \left(\frac{B_m^C a}{2} \right) = \frac{D^R a}{2 D^C L^R} \coth \left(\frac{\tilde{b}}{L^R} \right) \quad \dots (15)$$

$$\frac{B_m^C a}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore B_m^C{}^2 < \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$$

$$\left(\text{裸(反射体なし)の場合 } B_m^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{a}} \right)^2 \right)$$

裸の原子炉と反射体付の原子炉の炉心寸法の差を反射体節約 δ と定義

$$\delta = [a(\text{裸}) - a(\text{反射体付})]/2 \quad \dots (16)$$

例. 平板原子炉における反射体節約

$$\delta = \frac{1}{B_m^C} \tan^{-1} \left[\frac{D^C B_m^C L^R}{D^R} \tanh \left(\frac{\tilde{b}}{L^R} \right) \right] \quad \dots (17)$$

厚い反射体 ($b \gg L^R$) の場合

$$\delta \cong \frac{D^C}{D^R} L^R \quad \dots (18)$$

5.4 原子炉の臨界計算

(1) 臨界の原子炉の組成や寸法を決定するのに一般的に用いられる方法

拡散方程式

$$-\nabla D \nabla \phi + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) = v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad (\text{臨界のときしか成り立たない}) \quad \dots (19)$$

境界条件

$$\phi(\tilde{\mathbf{r}}_s) = 0$$

以下のような任意のパラメータ k を導入する。

$$-\nabla D \nabla \phi + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad \dots (20)$$

ある炉心の寸法組成で(20)式を解き, k を求める。(固有値問題)

k : 増倍固有値

(2) ベキ乗法による固有値問題の解法

(20)式を演算子法で書き換える

$$M\phi = \frac{1}{k} F\phi \quad \dots (21)$$

ここで, $M \equiv -\nabla D(\mathbf{r}) \nabla + \Sigma_a(\mathbf{r}) \equiv$ 消滅演算子 (もれと吸収)

$F \equiv v \Sigma_f(\mathbf{r}) \equiv$ 生成演算子 (核分裂)

推定値 $\phi^{(n)}$ と $k^{(n)}$ が得られるとき, 中性子源項の推定値は

$$S^{(n)} = F\phi^{(n)} \quad \dots (22)$$

となる。よって

$$M\phi^{(n+1)} = \frac{1}{k^{(n)}} S^{(n)} \quad \dots (23)$$

より $\phi^{(n+1)}$ を求め次の式から,

$$S^{(n+1)} = F\phi^{(n+1)} \quad \dots (24)$$

が計算でき, 推定値 $S^{(n)}$ から, より改善された推定値 $S^{(n+1)}$ を繰り返し計算で求めることが出来る。 n が大きくなると,

$$M\phi^{(n+1)} \cong \frac{1}{k^{(n+1)}} F\phi^{(n+1)} \quad \dots (25)$$

となり, $k^{(n+1)}$ と $\phi^{(n+1)}$ は(21)式をみたす固有値, 固有関数に収束する。

このとき(25)式を全空間で積分すると,

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int d^3r F\phi^{(n+1)}}{\int d^3r M\phi^{(n+1)}} \quad \dots (26)$$

(23)式, (24)式から,

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int d^3r S^{(n+1)}(\mathbf{r})}{\frac{1}{k^{(n)}} \int d^3r S^{(n)}(\mathbf{r})} \quad \dots (27)$$

$S^{(n+1)}$ をつくるための
実効的な中性子源

すなわち(21)式の固有値 k が, 原子炉内の 2 つの核分裂世代の中性子数の比である実効増倍率の定義と一致していることが分かる。

原子炉を臨界とするには, 原子炉の寸法や組成を調整して(21)式または(20)式の固有値 k が $k=1$ となるようにすればよい。