

フーリエ変換とラプラス変換

フーリエ変換の定義

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ を満足する $f(t)$ について

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

フーリエ変換の性質

(1) 線形性

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)\end{aligned}$$

(2) 原関数の移動

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt e^{-j\omega\tau} = F(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

(3) 像関数の移動

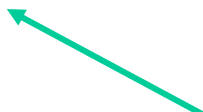
$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(t) e^{-jkt}\} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega+k)t} dt = F(j(\omega+k))$$

(4) 時間軸の伸縮

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(At)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(At)e^{-j(\omega/A)(At)} \frac{1}{A} d(At) = \frac{1}{A} F\left(\frac{j\omega}{A}\right)$$

(5) 時間微分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt = \left[f(t)e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -j\omega f(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega F(j\omega)$$



$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ を満足するので0

フーリエ変換の例(1)

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ e^{-at} & (t\geq 0) \end{cases} \quad \text{但し, } a \text{ は正.}$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$= \left[\frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega}$$

フーリエ変換の例(2)

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} V_L(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} V_L(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} L \frac{dI_L(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[L I_L(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} L I_L(t) (-j\omega) e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega L \int_{-\infty}^{\infty} I_L(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega L I_L(j\omega) \end{aligned}$$

$$\text{同様に, } I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \rightarrow I_C(j\omega) = j\omega C V_C(j\omega)$$

ラプラス変換の定義

$$f(t) \equiv 0 \quad (t < 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (\sigma \text{ は実数}) \quad \text{を満足する } f(t) \text{ について}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

但し, $s = \sigma + j\omega$ である.

ラプラス変換の性質

(1) 線形性

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-st} dt + a_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\end{aligned}$$

(2) 原関数の移動

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt e^{-s\tau} = F(s) e^{-s\tau}$$

(3) 像関数の移動

$$\int_0^{\infty} \{f(t) e^{-jkt}\} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+jk)t} dt = F(s+jk)$$

(4) 時間軸の伸縮

$$\int_0^{\infty} f(At)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(At)e^{-(s/A)(At)} \frac{1}{A}d(At) = \frac{1}{A}F\left(\frac{s}{A}\right)$$

(5) 時間微分

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[\underline{f(t)e^{-st}} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s f(t) e^{-st} dt = sF(s) - \underline{f(0_-)}$$

$t=0$ のとき0とはかぎらない

ラプラス変換の例(1)

$$f(t)=u(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t\geq 0) \end{cases} \quad (u(t)\text{を単位ステップ関数と呼ぶ.})$$

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

$$=\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^{\infty}=\left[\frac{1}{-s}e^{-(\sigma+j\omega)t}\right]_0^{\infty}=\left[\frac{1}{-s}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\right]_0^{\infty}$$

$\sigma>0$ ならば

$$=0-\left(\frac{1}{-s}\right)=\frac{1}{s}$$

ラプラス変換の例(2)

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ e^{-at} & (t\geq 0) \end{cases} \quad \text{但し, } a \text{ は正.}$$

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt$$

$$=\left[\frac{1}{-(a+s)}e^{-(a+s)t}\right]_0^{\infty}=0-\frac{1}{-(a+s)}=\frac{1}{a+s}$$

ラプラス変換の例(3)

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}$$

$$V_L(s) = \int_0^{\infty} V_L(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} L \frac{dI_L(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \left[L I_L(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} L I_L(t) (-s) e^{-st} dt$$

$$= 0 - L I_L(0_-) + s L \int_0^{\infty} I_L(t) e^{-st} dt = s L I_L(s) - L I_L(0_-)$$

$$\text{同様に, } I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I_C(s) = s C V_C(s) - C V_C(0_-)$$

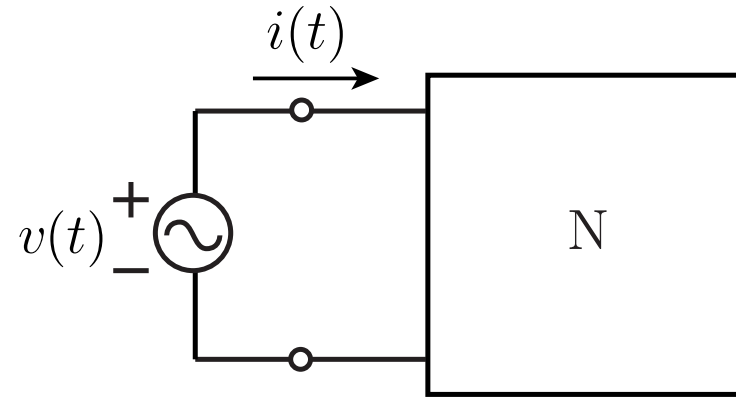
問：次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} g(\tau) \int_0^{\infty} h(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt e^{-s\tau} d\tau \\
&= \int_0^{\infty} g(\tau) H(s) e^{-s\tau} d\tau \\
&= G(s) H(s)
\end{aligned}$$

フーリエ変換とラプラス変換の比較 (正弦波定常応答の場合)

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ V_m e^{j\omega t} & (t \geq 0) \end{cases}$$



$$v(t) \rightarrow V(s), \quad i(t) \rightarrow I(s), \quad I(s) = H(s)V(s) + H_0(s)$$

$H(s)$: 初期値に無関係な関数

$H_0(s)$: 初期値で決まる関数

$$v(t) \rightarrow V(s), \quad i(t) \rightarrow I(s), \quad I(s) = H(s)V(s) + H_0(s)$$

$H(s)$: 初期値に無関係な関数

$H_0(s)$: 初期値で決まる関数

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad H_0(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)}, \quad D(s) = \prod_{i=1}^m (s - s_i)$$

$$H_0(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{s - s_i} \rightarrow h_0(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{s_i t}$$

回路が安定であるための必要十分条件



すべての s_i の実部が負

$$H(s)V(s) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)v(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)v(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)V_me^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau V_me^{j\omega t} \\ &= H(j\omega)v(t) \end{aligned}$$

$$I(s)=H(s)V(s)+H_0(s) \quad \rightarrow \quad i(t)=H(j\omega)v(t)+\sum_{i=1}^m \alpha_i e^{s_i t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = H(j\omega)v(t)$$

回路関数

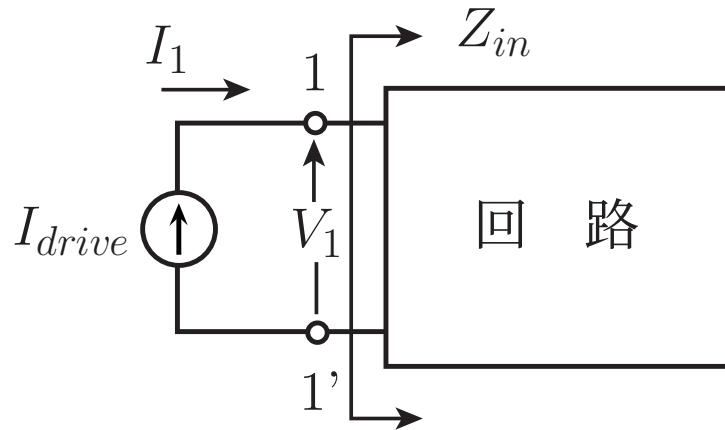
すべての初期値を零とした場合の
入力と出力のラプラス変換の比

極と零点

零点 : 回路関数の分子多項式の解

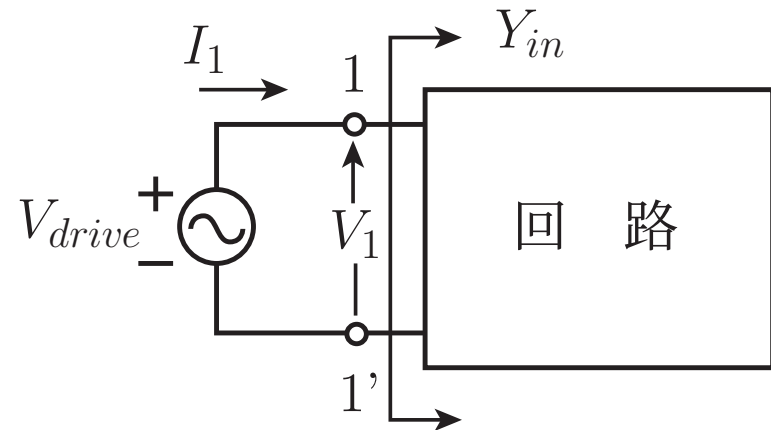
極 : 回路関数の分母多項式の解

回路の安定性



(a)

$$V_1 = Z_{in} I_{drive}$$



(b)

$$I_1 = Y_{in} V_{drive}$$

Z_{in} の極の実部が負ならば安定（開放安定）

Y_{in} の極の実部が負ならば安定（短絡安定）

回路の周波数特性

回路関数 $F(s)$

$$F(s)=F_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$z_i(i=1\sim m)$ は零点, $p_i(i=1\sim n)$ は極

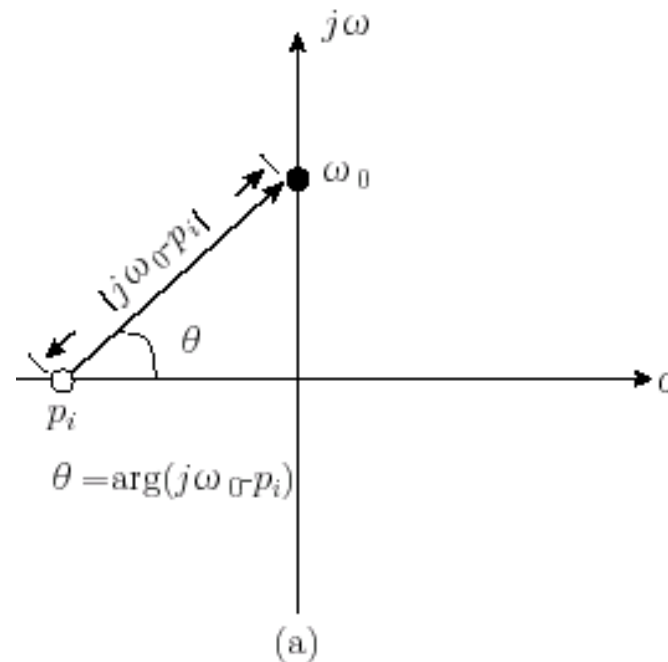
振幅特性 $|F(j\omega)|$

$$|F(j\omega)|=|F_0|\frac{|j\omega-z_1||j\omega-z_2|\cdots|j\omega-z_m|}{|j\omega-p_1||j\omega-p_2|\cdots|j\omega-p_n|}$$

位相特性 $\arg F(j\omega)$

$$\begin{aligned}\arg F(j\omega)=&\arg(j\omega-z_1)+\arg(j\omega-z_2)+\cdots+\arg(j\omega-z_m) \\ &-\arg(j\omega-p_1)-\arg(j\omega-p_2)-\cdots-\arg(j\omega-p_n)\end{aligned}$$

実極と周波数特性



$\omega_0=0$ (直流) のとき

$|j\omega_0 - p_i|$: 最小

$\arg(j\omega_0 - p_i) = 0^\circ$



単調増加

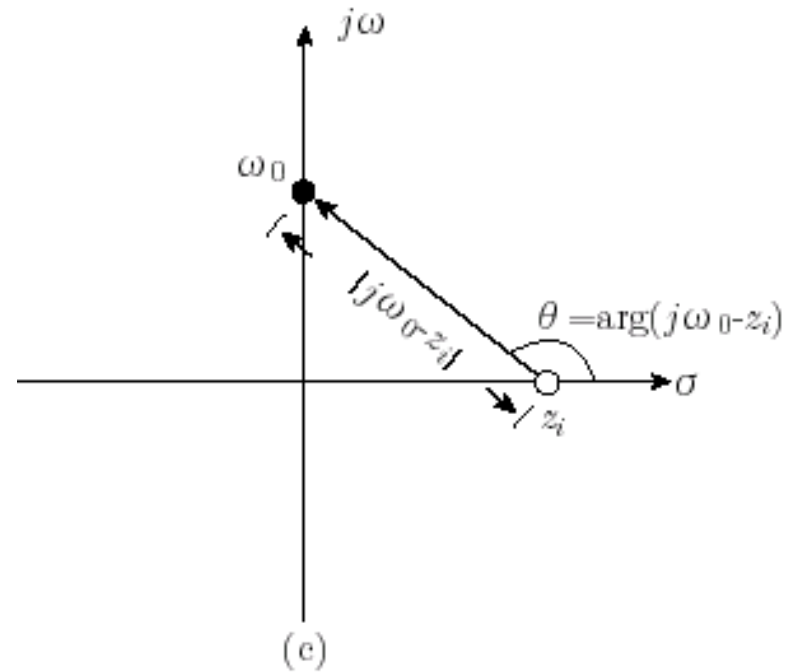


$\omega_0=\infty$ のとき

$|j\omega_0 - p_i|$: 無限大

$\arg(j\omega_0 - p_i) = 90^\circ$

実零点と周波数特性



$|j\omega_0 - z_i|$ の動き $|j\omega_0 - p_i|$ と同じ

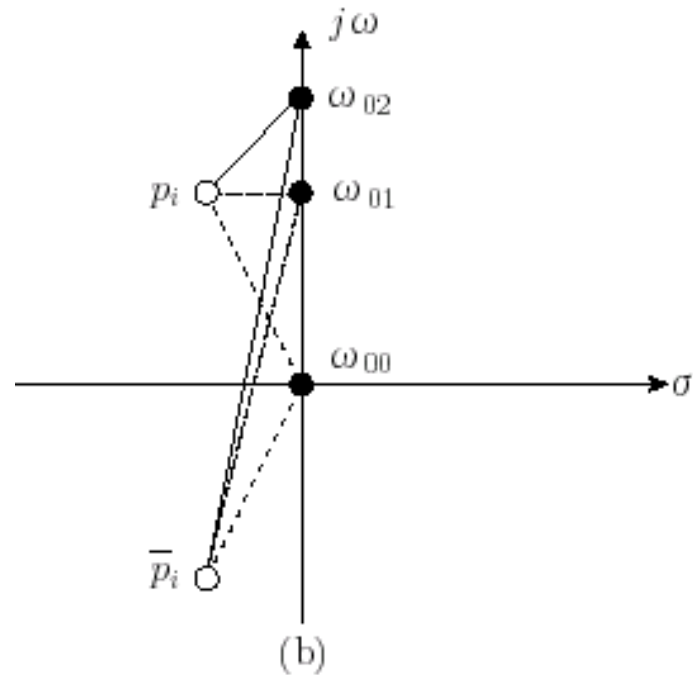
$\omega_0=0$ のとき

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 180^\circ$$

$\omega_0=\infty$ のとき

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 90^\circ$$

複素極と周波数特性

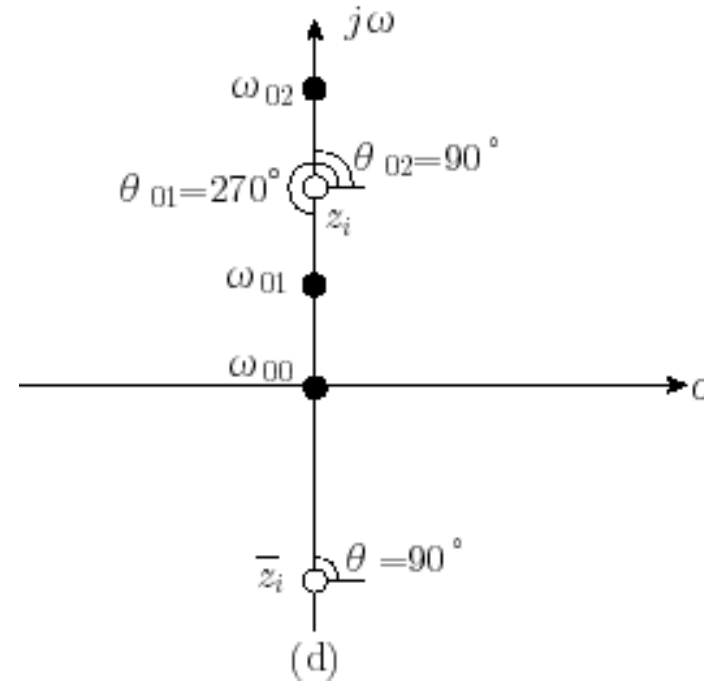


振幅特性: $|j\omega_0 - p_i| |j\omega_0 - \bar{p}_i|$

位相特性: $\arg(j\omega_0 - p_i) + \arg(j\omega_0 - \bar{p}_i)$

複素零点と周波数特性

$$\arg(j\omega_0 - \bar{z}_i) = 90^\circ$$



$$\omega_0 < |z_i|$$

$$\omega_0 = |z_i|$$

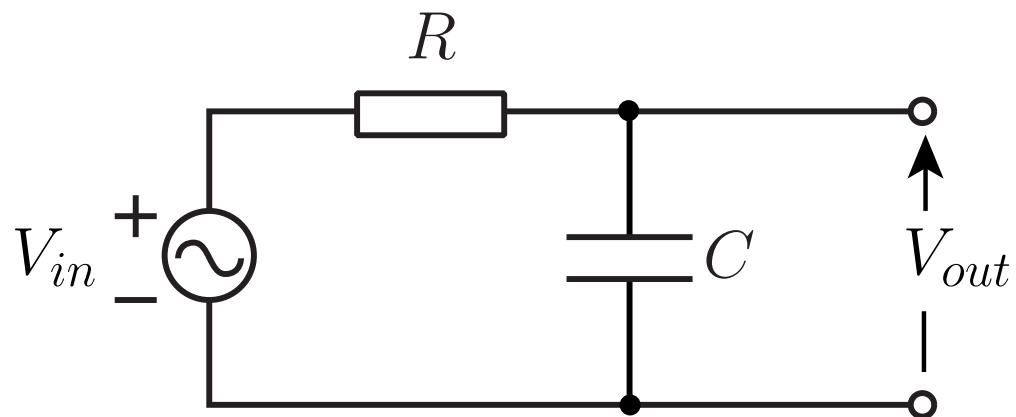
$$\omega_0 > |z_i|$$

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 270^\circ$$

——

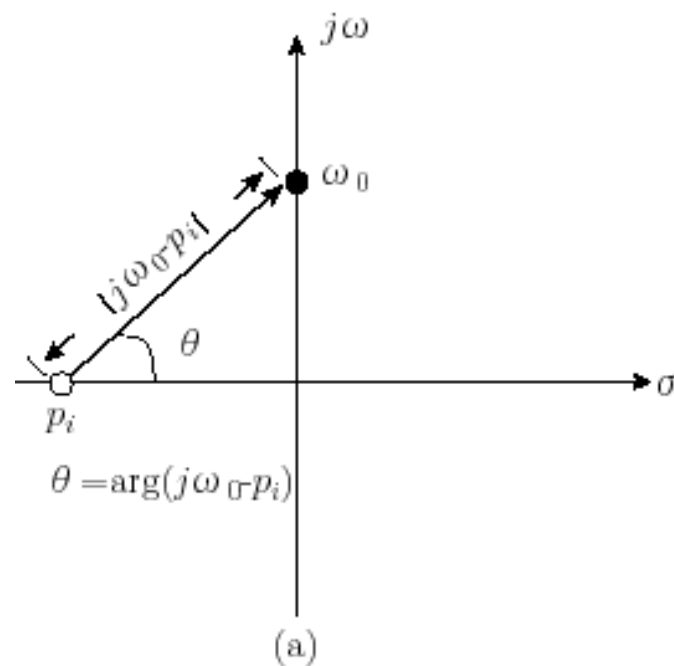
$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 90^\circ$$

受動RC回路の周波数特性例(1)

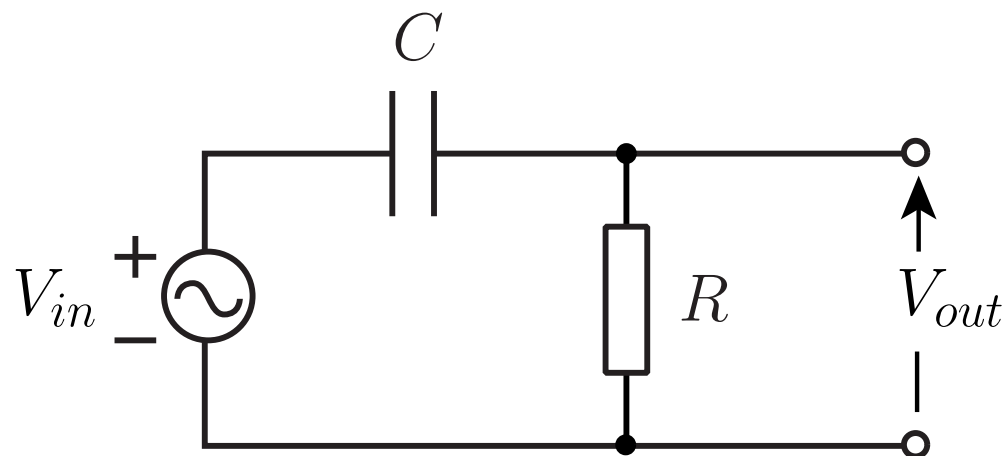


$$T_a(s) = \frac{1}{1 + sCR}$$

$\frac{-1}{CR}$ に極

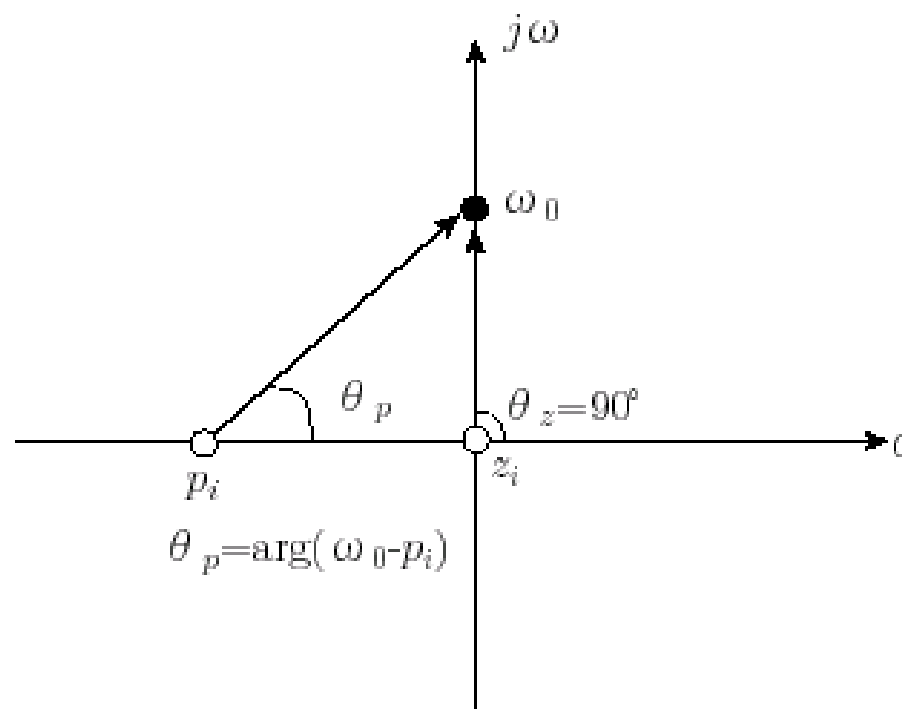


受動RC回路の周波数特性例(2)



$$T_b(s) = \frac{sCR}{1+sCR}$$

直流に零点, $\frac{-1}{CR}$ に極



複数の極や零点を有する伝達関数の場合

$$T(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$|p_1| \ll |z_1| \ll |p_2|$ と仮定

$\omega \approx |p_1|$ のとき $\omega/|z_1| \ll 1$, $\omega/|p_2| \ll 1$ なので

$$T(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{z_1(j\omega/z_1 - 1)}{p_2(j\omega - p_1)(j\omega/p_2 - 1)}$$

$$|T(j\omega)| \approx \frac{|z_1|}{|p_2| |j\omega - p_1|}$$

$$\arg T(j\omega) \approx \arg\left(\frac{z_1}{p_2}\right) - \arg(j\omega - p_1)$$

$|p_1| \ll \omega \ll |z_1|$ のとき

$|p_1|/\omega \ll 1, \quad \omega/|z_1| \ll 1, \quad \omega/|p_2| \ll 1$ のので

$$T(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{z_1(j\omega/z_1 - 1)}{j\omega p_2(1 - p_1/j\omega)(j\omega/p_2 - 1)}$$

$$|T(j\omega)| \approx \frac{|z_1|}{|p_2| \omega}$$

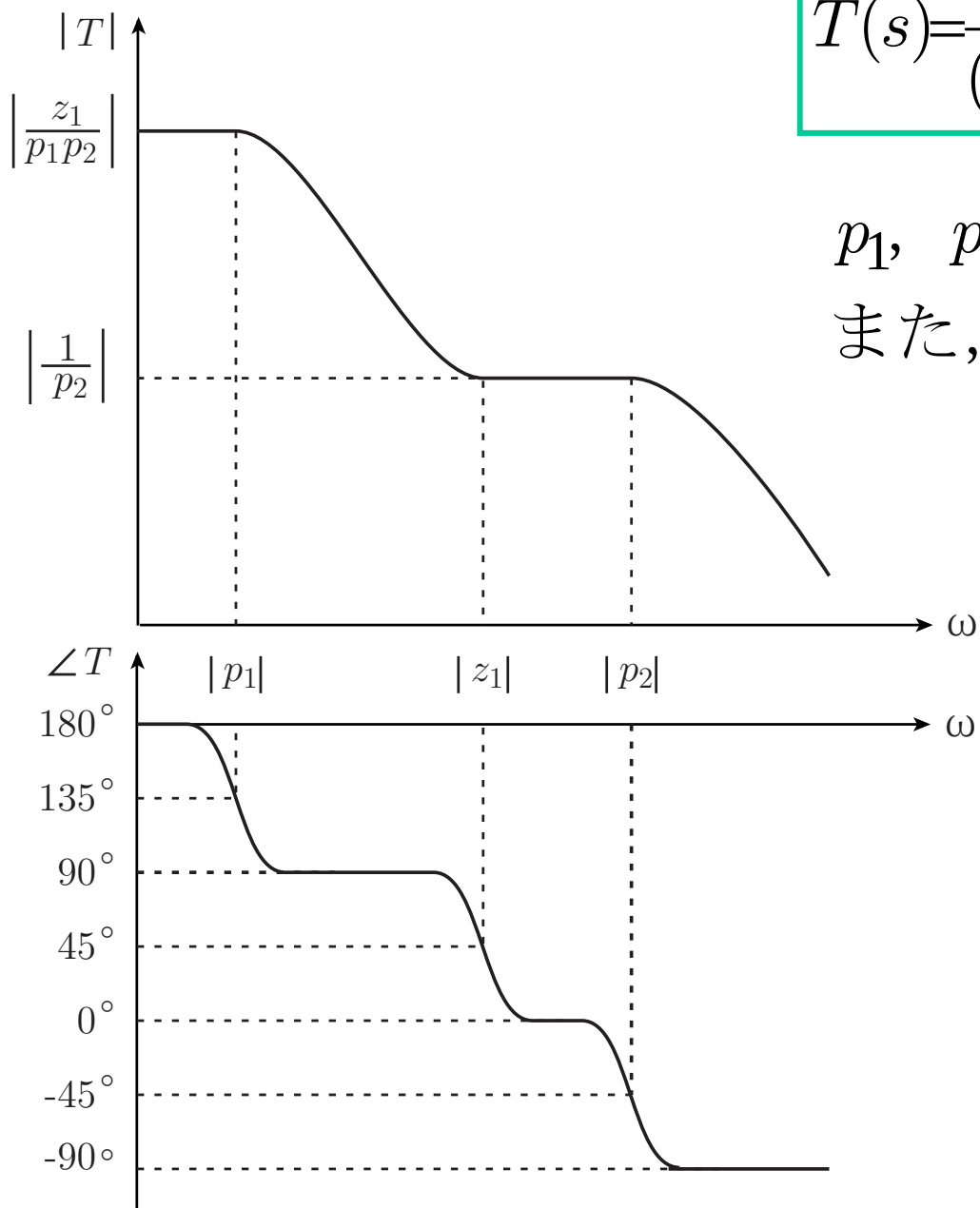
$$\arg T(j\omega) \approx \arg\left(\frac{z_1}{p_2}\right) - 90^\circ$$

回路の周波数特性の例

$$T(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

p_1, p_2, z_1 は実数.

また, $p_1 < 0, p_2 < 0, z_1 > 0$ とする.



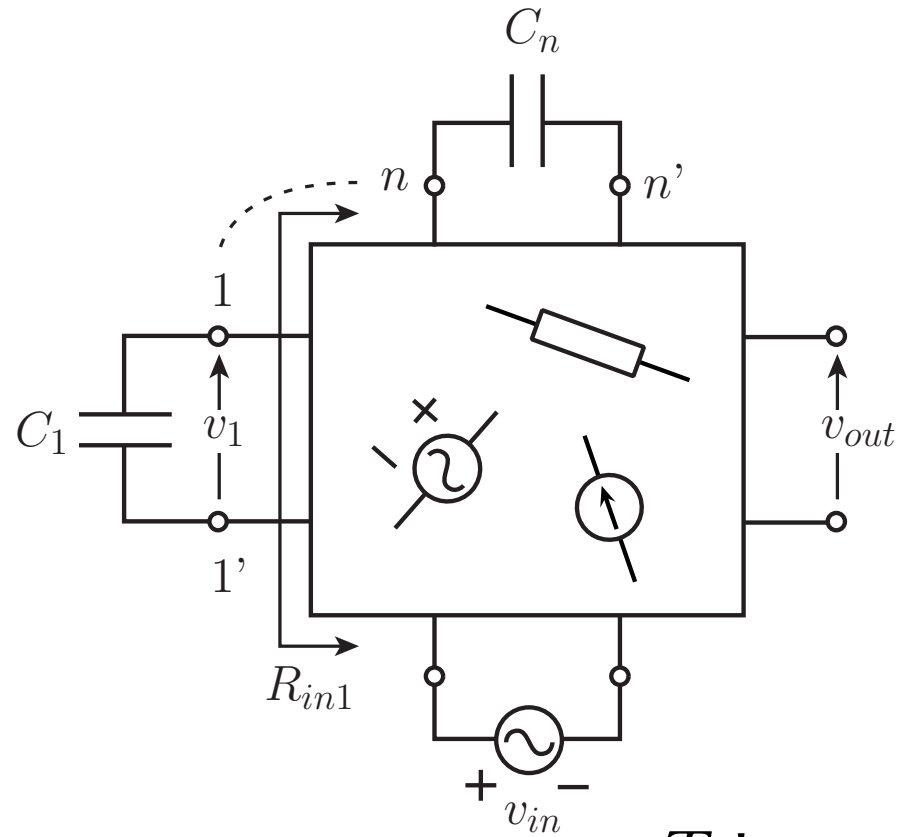
零時定数解析

$$T(j\omega) = \frac{T_0}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} \text{と近似}$$

$|p_1| \ll |p_i| (i=2 \sim n)$ と近似

$\omega \ll |p_i| \quad (i=2 \sim n)$ のとき

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2) \cdots (1 - j\omega/p_n)} \\ &\approx \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)} \end{aligned}$$



$$T(j\omega) = \frac{T_0'}{1 + j\omega C_1 R_1 + j\omega C_2 R_2 + \dots + j\omega C_n R_n + D_1(j\omega)}$$

$$\frac{v_1}{v_{in}} = \frac{k_1}{1 + j\omega C_1 R_{in1}}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{k_1'}{1 + j\omega C_1 R_{in1}}$$

$$k_1' = T_0', \quad R_1 = R_{in1}$$

$$T(j\omega) \approx \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)}$$

$$T(j\omega) = \frac{T_0'}{1 + j\omega C_1 R_{in1} + j\omega C_2 R_{in2} + \cdots + j\omega C_n R_{inn} + D_1(j\omega)}$$

$$-\frac{1}{p_1} \approx C_1 R_{in1} + C_2 R_{in2} + \cdots + C_n R_{inn}$$

p_1 : 主要極

$$T_0' = \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n}$$