基礎物理学演習VI-a(竹森)No.4

2013.6.6（赤）,13（白）

【1】《中心力》
原点 O を中心とする中心力の下で運動している質点 m が半径 a の円軌道を描いていて，O 点がその円軌道上にあるという．
(※) O 点は円軌道の中心ではない，念のため．
(i) 2 次元極座標系 (r, ϕ) での運動方程式の一般形を書き下ろせ．
(※) 答だけでよいが，導き方は確認しておくこと．
(ii) 中心力の距離依存性はどのようになっているか．

【2】《角運動量》
(i) 質点 m の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}$ であるとき，速度 $\boldsymbol{v}$，運動量 $\boldsymbol{p}$，加速度 $\boldsymbol{a}$ はそれぞれどのように表されるか．
(ii) 角運動量 $\boldsymbol{L}$ はどのように表されるか．
(iii) 元の原点から見て位置ベクトルが $\boldsymbol{b}$ (時間によらない) の点をあらたに原点とした．新しい座標系での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$，速度を $\boldsymbol{v}'$，運動量を $\boldsymbol{p}'$，加速度を $\boldsymbol{a}'$ とするとき，それらは元の座標系での $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$ とそれぞれどのような関係にあるか．
(iv) 新しい座標系での角運動量を $\boldsymbol{L}'$ とするとき，それは元の座標系での $\boldsymbol{L}$ とどのような関係にあるか．
(v) (i)〜(iv) の答を見て，問題の作者は何に注意して欲しいのか，推察せよ．

【3】質点 m がポテンシャル

$$U(r) = -\frac{k}{r^n}, \quad (k > 0, n > 0) \tag{1}$$

の下で運動している。
(i) 有効ポテンシャル $U_e(r)$ を求めよ。ただし、質量を m とし、角運動量を mh とすること。
(ii) 以下では、半径 a の円運動をしているとする。周期を求めよ。
(iii) 全エネルギーを求めよ。

【4】

(i) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を証明せよ。

(ii)$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ を示せ。
(iii) 以下の $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ の証明には間違いがある。どこが間違っているか指摘せよ。

（試験の際に多くの人が間違える典型例です。）

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= (\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i \\
&= \epsilon_{ijk}A_j(\vec{B}\times\vec{C})_k \\
&= \epsilon_{ijk}A_j(\epsilon_{klm}B_lC_m) \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m \\
&= A_jB_iC_j - A_jB_jC_i \\
&= A_jC_jB_i - A_jB_jC_i \\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})B_i - (\vec{A}\cdot\vec{B})C_i \\
&= ((\vec{A}\cdot\vec{C})B - (\vec{A}\cdot\vec{B})C)_i \\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}
\end{aligned}
$$

(iv)$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$ という式を証明することを考えます。講義では、大きな構造から手を付けていくという説明をしました。つまり、$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=A_i(\vec{A}\times\vec{B})_i=A_i\epsilon_{ijk}A_jB_k=\epsilon_{ijk}A_iA_jB_k=0$ とします。ここでわざと小さな構造、つまり $(\vec{A}\times\vec{B})$ をレビ・チビタ記号で表現することからはじめて、証明してみてください。