

定理 2.2 の証明

5月8日(水)の講義では定理 2.2 の証明を行いました, 時間内に板書しきれませんでした. 以下に定理 2.2 の証明をすべて記します.

定理 2.2 (1) 任意の行列 A は行基本変形をくり返すことにより階段行列 B に変形できる. (2) (1) の A, B に対し, $B = PA$ をみたす正則行列 P が存在する.

証明 (1) $A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする. A の列ベクトル分解を $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ とする. n 個の m 次列ベクトル $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を次のように帰納的に定義する.

(I) (i) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{o}$ ならば, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{o}$ とおく. (ii) $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$ ならば, $a_{i,1} \neq 0$ であるような i ($1 \leq i \leq m$) を 1 つ選び, 第 i 行を $1/a_{i,1}$ 倍する. 次に, 第 k 行 ($k \neq i$) に第 i 行の $-a_{k,1}$ 倍を加え, 第 i 行と第 1 行を入れ替える. 以上の行基本変形を行った後の行列を $A_1 = [\mathbf{a}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_n^{(1)}]$ とし, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1^{(1)} = \mathbf{e}_1$ とおく. (i), (ii) いずれの場合も $\mathbf{b}_1$ は階段行列である.

(II) A に行基本変形をくり返して $A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_\ell$ が得られたとし, A_j の列ベクトル分解を $A_j = [\mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{a}_n^{(j)}]$ ($1 \leq j \leq \ell$) とする. 次の①, ②, ③を仮定する.

① $\mathbf{a}_j^{(j)} = \mathbf{a}_j^{(j+1)} = \dots = \mathbf{a}_j^{(\ell)}$ ($1 \leq j \leq \ell$).

② $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j^{(j)}$ ($1 \leq j \leq \ell$) とおくと, $B_\ell = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell]$ は階段行列である.

③ B_ℓ は第 1 行から第 r 行までが $\mathbf{o}$ でなく, 第 $r+1$ 行から第 m 行までが $\mathbf{o}$ である.

(i) $\mathbf{a}_{\ell+1}^{(\ell)}$ の第 $r+1$ 成分から第 m 成分までが 0 ならば, $A_{\ell+1} = A_\ell$ とし, $\mathbf{b}_{\ell+1} = \mathbf{a}_{\ell+1}^{(\ell)}$ とする. (ii) $\mathbf{a}_{\ell+1}^{(\ell)}$ の第 i 成分 $a_{i,\ell+1}^{(\ell)}$ ($r+1 \leq i \leq m$) が 0 でないとする. 第 i 行を $1/a_{i,\ell+1}^{(\ell)}$ 倍し, 第 k 行 ($k \neq i$) に第 i 行の $-a_{k,\ell+1}^{(\ell)}$ 倍を加え, 第 i 行と第 $r+1$ 行を入れ替える. 以上の行基本変形を A_ℓ に行った後の行列を $A_{\ell+1} = [\mathbf{a}_1^{(\ell+1)}, \dots, \mathbf{a}_n^{(\ell+1)}]$ とし, $\mathbf{b}_{\ell+1} = \mathbf{a}_{\ell+1}^{(\ell+1)} (= \mathbf{e}_r)$ とする. (i), (ii) いずれの場合も $\mathbf{a}_j^{(\ell)} = \mathbf{a}_j^{(\ell+1)}$ ($1 \leq j \leq \ell$) であり, $B_{\ell+1} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{\ell+1}]$ は階段行列である.

(I), (II) より $B = B_n$ が定まる. B は階段行列である.

(2) (1) において A に行基本変形をくり返して B が得られた. 各行基本変形に対応する基本行列を $P_1, \dots, P_s$ とすると, $B = P_s \cdots P_1 A$ となる. 定理 2.1, 定理 1.2 より $P = P_s \cdots P_1$ は正則行列である. $\square$

コメント 上の証明は抽象的でそのままではわかりにくいので, 行列の図を描いて議論を追いかけてみるとよいと思います. また, 教科書の証明と比べてみるのもよいでしょう. $\diamond$