

1. 次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 行基本変形を繰り返すことにより, A を階段行列に変形せよ.
 (2) 列基本変形を繰り返すことにより, (1) の階段行列を標準形に変形せよ.

解答例 (1) まず, 第3行を $1/2$ 倍すると

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. 第1行と第3行を入れ替え, 新しい第1行の -3 倍を新しい第2行に加えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

となる. 第2行を $1/2$ 倍し, 新しい第2行の -1 倍を第3行に加えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 第3行を $1/2$ 倍し, 新しい第2行と第3行を入れ替えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる. 最後に, 第2行の3倍を第1行に加え, 第3行の -1 倍をそれぞれ新しい第1行, 第2行に加えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A'$$

となる. この行列 A' が A の階段行列である.

(2) A' において, 第 1 列の $-2, 1$ 倍をそれぞれ第 2 列, 第 5 列に加えると

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる. 第 3 列の 2 倍と第 4 列の -2 倍を第 5 列に加え, 新しい第 2 列と第 3 列, 第 3 列と第 4 列を順次入れ替えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A''$$

となる. この行列 A'' が A の標準形である. $\square$

解説・講評 問題 1 は与えられた行列の階段行列と標準形を求める問題です. (1) を 7 点, (2) を 3 点とし, 10 点満点で採点しました. 非常によくできていました. 行基本変形・列基本変形に関しては, ほとんどの人が計算の過程を詳しく説明していて, よい答案が多かったように思います. (1) の途中で計算を間違えた人にも方針が合っていれば部分点を出しました. ただし, 答えが階段行列になっていないものは 0 点にしました.

2. 次の行列 B が正則であるか調べ, 正則ならばその逆行列を求めよ.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解答例 3×6 行列 $[B, I]$ を行基本変形によって変形する. まず, 第 3 行の $-1, 1$ 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行に加えると

$$[B, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

となる. 第 1 行の -2 倍を第 3 行に加え, 新しい第 2 行の $3, -5$ 倍をそれぞれ新しい第 1 行, 第 3 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right]$$

となる. 最後に, 第 3 行の -1 倍を第 2 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right]$$

となる. 以上の変形の左側のみを見ると, B に行基本変形を繰り返すことにより単位行列 I がえられることがわかる. つまり, B の階段行列は I である. よって, B は正則である.

行基本変形は左から基本行列をかけることと同じであるから, 上の変形から, ある 3 次正則行列 P が存在して $PB = I$ となることがわかる. この式の両辺に左から P^{-1} をかけると $B = P^{-1}$ となるから, $B^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$ である. 一方, $P[B, I] = [PB, PI] = [I, P]$ となるから, 上の変形の最後に現れた行列は $[I, P]$ である. よって,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

となる. $\square$

解説・講評 問題 2 は与えられた正方行列の逆行列を求める問題です. 正則性の判定を 3 点, 逆行列の計算を 7 点とし, 10 点満点で採点しました. 非常によくできていました. B が正則である理由は, 解答例のように「 B の階段行列が I であるから」と書いた人が最も多かったようです. 他にも「 B の行列式が 0 でないから」というものや, 計算で求めた行列を B の左右からかけて I になることを確かめているものなど, いくつかの解法がありました. また, 解答例のように, 上のような計算によって逆行列が求められる理由をきちんと書いている答案もあり, 感心しました.

3. 次の連立 1 次方程式が解をもつための実数 a, b についての条件を求め, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ ax + y = b \end{cases}$$

解答例 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列を求め, 第 1 行の $-2, -a$ 倍をそれぞれと第 2 行, 第 3 行に加えると

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & b \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1-2a & -3a & b-a \end{array} \right]$$

となる. 第 2 行を $-1/5$ 倍し, 新しい第 2 行の $-2, -1+2a$ 倍をそれぞれ第 1 行, 第 3 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & -3a & b-a \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-a \end{array} \right]$$

となる. 連立1次方程式が解をもつためには, 拡大係数行列の階数と係数行列の階数が等しくなる必要がある. $-a-1 \neq 0$, すなわち $a \neq -1$ ならば, 拡大係数行列の階数と係数行列の階数はいずれも3となり等しい. $-a-1=0$, すなわち $a=-1$ ならば, $b-a=0$ のとき, すなわち $a=b=-1$ のときに限って拡大係数行列の階数と係数行列の階数が2となり等しくなる.

❶ $a \neq -1$ のとき: 上の行列の第3行を $-1/(a+1)$ 倍し, 新しい第3行の -1 倍を第1行, 第2行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (a-b)/(a+1) \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (b+1)/(a+1) \\ 0 & 1 & 0 & (b-a)/(a+1) \\ 0 & 0 & 1 & (a-b)/(a+1) \end{array} \right]$$

となる. 従って, 求める解は

$$x = \frac{b+1}{a+1}, \quad y = \frac{b-a}{a+1}, \quad z = \frac{a-b}{a+1}$$

となる.

❷ $a=b=-1$ のとき: 上の行列から定まる連立1次方程式は

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

であるから, 求める解は

$$x=1-c, \quad y=-c, \quad z=c \quad (c \text{ は任意の定数})$$

となる. $\square$

解説・講評 問題3は未知の定数を含む連立1次方程式の解を求める問題です. 拡大係数行列の行基本変形を8点, $a \neq -1$ の解の考察を6点, $a = -1$ の場合の解の考察を6点とし, 20点満点で採点しました. とてもよくできていました. 多くはありませんでしたが, $a+1$ が0でないことを仮定せずに割り算を行っている人がいました. また, $a \neq -1, a = -1$ のうちの片方の考察が抜けている人もいました. 注意しましょう.

4. A, B, C をそれぞれ $m \times m$ 行列, $n \times n$ 行列, $m \times n$ 行列とし,

$$P = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \quad (\text{ただし, } O \text{ は } n \times m \text{ 型の零行列})$$

とする. このとき, A, B が正則ならば P も正則であり,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを証明せよ.

解答例 A, B は正則であるから, A^{-1}, B^{-1} が存在する. これらはそれぞれ $m \times m$ 行列, $n \times n$ 行列であるから, 行列の積 $-A^{-1}CB^{-1}$ を考えることができ, これは $m \times n$ 行列となる. そこで, $(m+n) \times (m+n)$ 行列

$$Q = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{ただし, } O \text{ は } n \times m \text{ 型の零行列})$$

を考える. このとき, P, Q は同じ形に分割されているから

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AA^{-1} + CO & A(-A^{-1}CB^{-1}) + CB^{-1} \\ OA^{-1} + BO & O(-A^{-1}CB^{-1}) + BB^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AA^{-1} & -CB^{-1} + CB^{-1} \\ O & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix} = I_{m+n} \\ QP &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1}A + (-A^{-1}CB^{-1})O & A^{-1}C + (-A^{-1}CB^{-1})B \\ OA^{-1} + B^{-1}O & OC + B^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}C - A^{-1}C \\ O & B^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix} = I_{m+n} \end{aligned}$$

となる. よって, P は正則行列であり, $P^{-1} = Q$ である. $\square$

解説・講評 問題 4 は分割された正方行列の逆行列に関する論証問題です. 10 点満点で採点しました. よくできていました. 解答例のように, $PQ = QP = I$ であることを示す方法が最も素直な解法でしょう. $PQ = I$ のみを示した答案は減点しました. 実際には $PQ = I$ から $QP = I$ を証明することができますが, 簡単ではないからです. ただし, P が正則であることが別の方法で示してあるものには 10 点をつけました. $PQ = I$ から $Q = P^{-1}$ が直ちに導かれるからです. また, P を行基本変形によって Q に変形するという方針の答案も多く見受けられました. P をあたかも 2×2 行列のように行基本変形して Q を導いているものが多かったのですが, その変形が本来の行基本変形だけを用いて行うことができることをきちんと示した答案はわずかでした. この点が曖昧な答案はすべて減点しました.