選好と序数効用

合理的思考の技術 Lecture 2

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

April 15, 2013

$1 + 1 = 2$?

- $1 + 1 = 2$ は正しい？
- もし正しいとすれば、なぜ正しい？
- いつも正しい？どういうときに正しい？

Example (名目数 Nominal Number, 順序数（序数） Ordinal Number)

名目数 単なるラベル – W9 号館

順序数 大小関係のみ問題 – 1 位, 2 位

名目数や順序数の集合上では、そもそも “+” の演算が定義されない。

Example (直感の形式モデル化)

アルコール 1 L と水 1 L を「たす」と 2 L にはならない。

現実世界で「たす」という直感が、厳密に数学における “+” の性質を満たすとは限らない。

関係 Relation

Definition (関係)

集合 $A_1, ..., A_n$ 上の関係 R とは、$R \subset \times_{i=1}^{n} A_i$

Definition (二項関係 Binary Relation)

集合 A 上の二項関係とは $R \subset A^2$

$(x, y) \in R$ のとき、xRy とも表記し、「x と y は R で関係づけられている」と読む。

二項関係の表現 representation:

- 二次元平面上のグラフ
- 有向グラフ directed graph の隣接行列 adjacency matrix

代表的な二項関係の性質 [3]

反射 reflexive iff $\forall a \in A, aRa$

非反射 irreflexive iff $\forall a \in A, \neg(aRa)$

対称 symmetric iff $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

非対称 asymmetric iff $\forall a, b \in A, \neg(aRb \wedge bRa)$

反対称 antisymmetric iff $\forall a, b \in A, (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$

推移 transitive iff $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

完備(連結) complete (connected) iff $\forall a, b \in A, aRb \vee bRa$

二項関係の実例

Example

A を人の集合としよう。

- $a \in A$ が $b \in A$ のことを「好きだ」というのは、A 上の二項関係。「好き」は対称律を満たさない。e.g.) 片思い
- A 上の二項関係である「友達」関係は、対称律は満たす（というふうにも定義可能だ）が、推移律は満たさない。

Q. 一夫一妻制や一夫多妻制を関係として表現して、性質を調べてみよう！

二項関係の実例

Definition (同値 Equivalence)

集合 A 上の二項関係 $\equiv$ が同値関係である iff
$\equiv$ が反射、対称、推移を満たす。

Example

等号関係 “=” も同値関係の一種

Definition (半順序 Partial Order)

集合 A 上の二項関係 $\geq$ が半順序関係である iff
$\geq$ が反射、反対称、推移を満たす。

半順序の例 – パレート順序

Definition (パレート順序 Pareto Order)

$\Re^N$ 上の二項関係 $\geq$ がパレート順序である iff $\forall x, y \in \Re^N$

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i \geq y_i$$

同様に、$\Re^N$ 上の順序関係として以下の記号を用いる：

- $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$
- $x \gg y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i > y_i$

Q. パレート順序 $\geq$ が半順序関係であることを証明せよ。

パレート効率性 Pareto Efficiency

半順序関係においては、最大元が存在しないことが多い。代わりに、極大元について考えることが便利なことが多い。
パレート順序の極大元はパレート効率的であるという。

Definition (パレート効率)

$x \in S \subset \Re^N$ が

(弱 weakly) パレート効率的 iff $\neg\exists y \in S, y \gg x$

強 strongly パレート効率的 iff $\neg\exists y \in S, y > x$

合理的選好 Rational Preference

「a が b 以上に好ましい」という 選好関係 preference relation を $a \succsim b$ で表す。
選好関係が(経済学用語で) 合理的 rational であるとき、弱順序 weak order の公理を満たす。

Definition (弱順序 Weak Order)

二項関係 $\succsim$ on A が弱順序である iff $\succsim$ が完備性と推移律を満たす。

半順序、弱順序ともに実数 $\Re$ 上の線形順序 linear order $\geq$ の一般化。

Definition (全順序(線形順序) Total Order (Linear Order))

完備な半順序関係を全順序という。

記号の違いに注意!

半順序 $\geq$
弱順序 $\succsim$

専門用語としての合理性

- 好みが安定的 stable である
- 好みが内部整合性 internal consistency を満たす(導かれる選択が整合的である)
- 好みは意思決定主体の個性(社会正義、倫理、美　などの外的価値に一般には制約されない)
- 合理性 $\neq$ 知性　(意思決定問題が簡単であれば、簡単に解ける)

弱順序関係の成分分解

Definition (弱順序関係の成分分解)

強成分 Strict component $a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$

無差別成分 Indifference component $x \sim y \Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$

Proposition

$\succsim$ が合理的ならば:

- $\succ \cup \sim = \succsim \wedge \succ \cap \sim = \emptyset$
- $\succ$ は非反射的、非対称的で推移的
- $\sim$ は同値関係
- $\forall x, y, z \in X[x \succ y \sim z \Rightarrow x \succ z]$

選好が合理性を満たさない場合に考えられる原因:

- そもそも完備な評価が不要 – e.g. 圧倒的なナンバーワンの存在により、ナンバー2 以下の選択肢どうしの比較が不要
- そもそもランキングが困難 – e.g. パレート社会配分 allocation の評価
- グループの擬人化(e.g. 法人格 corporate actor)
- 区別できないほどの微少な差(限定合理性の一種) [4]
- フレーミング効果 framing effect [5]
- 不完備情報などによる意図せざる好みの変化(e.g. 中毒 addiction) [2]

法人格の合理性 – 集団意思決定による社会的選好

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か？

Example (コンドルセのパラドックス Condorcet's Paradox)

３人の投票者 $\{1,2,3\}$ がそれぞれ以下で表される選好 $\succsim_i$ $(i=1,2,3)$ を $A=\{a,b,c\}$ 上に持つとする。

1. $a \succ_1 b \succ_1 c$
2. $b \succ_2 c \succ_2 a$
3. $c \succ_3 a \succ_3 b$

多数決によって決まる「社会的選好 social preference」を $\succsim$ とおくと

$$a \succ b \text{ かつ } b \succ c \text{ かつ } c \succ a$$

よって、$\succsim$ は推移律を満たさない。

社会的選択理論とアローArrow の定理

Condorcet のパラドックスを一般化して、Arrow は(極めて自然な前提より)「合理的、パレート効率的かつ民主的 democratic な投票制度は存在しない(唯一のパレート効率的な合理的な投票制度は独裁制 dictatorship である)」ことを証明した。(ノーベル経済学賞受賞理由の一部)
興味ある人は、以下のキーワードを手がかりに自分で調べてみよう !:

- 社会的選択理論 social choice theory
- 社会厚生関数 social welfare function
- アローの定理 Arrow's theorem[1]

[1] Kenneth J. Arrow.
Social choice and individual values.
Yale University Press, 1951.

[2] Gary S. Becker and Kevin M. Murphy.
A theory of rational addiction.
Journal of Political Economy, 96(4):675–700, 08 1988.

[3] David Kreps.
Notes on the Theory of Choice.
Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.

[4] Ariel Rubinstein.
Modeling Bounded Rationality.
MIT Press, Cambridge, 1997.

[5] Amos Tversky and Daniel Kahneman.
The framing of decisions and the psychology of choice.
Science, 211(4481):453–458, 1981.