申告番号 0187 (or 3666) –「合理的思考の技術」試験問題

担当　小林憲正

2012 年 8 月 6 日（月）13:20 – 14:50

試験開始前に 以下の注意を無視せずに熟読すること！！！！
問題については、試験開始の合図があるまで伏せておいてください。

- すべての問題に回答せよ。
（出題形式が昨年度と大幅に異なるので注意せよ）
- 答案用紙は 2 枚配布する。追加の答案用紙が必要となった場合は挙手せよ。
答案用紙右上の No. 欄 に回答した順番にページ数を明記せよ。
答案用紙は裏も使用せよ。No.1 の表 → No.1 の裏 → No.2 の表 ··· という順序で答案用紙を使用せよ。
- 記述説明が中心の小問は簡潔な記述でオーケー。
数式や図の扱いが必要とされる問題は、特に注意書きがない限り、最終的な解やグラフの概形のみならず、導出過程も簡潔に記述せよ。
対称性が考慮できるときは、ひとつの場合についてのみ詳しく説明し、他の場合については「対称性より」や「··· の場合も同様」のような記述を利用して説明を簡潔にして良い。
常識の範囲内であれば、数式の中で説明抜きで略称を使ってオーケー。（例： 大岡山 → 大）
- 回答にあたってなにを参照するのも自由。
電子機器などの使用も可。音は出ない設定にしておくこと。
人の持ち込みも許可したが、これを利用する場合、コミュニケーションは静寂を保つこと。
インターネットに接続可能な情報機器の使用も可です。監視が難しいので、チャットも可とします。
ただし、試験時間が結構タイトだと思うので、点数を稼ぐ意味だけで言ってもお勧めはしません。
- カンニングは不正行為として禁止します！持ち込んだ人に回答を代理作成してもらい、それをコピーすることも、カンニングと同等とみなし禁止します！
見つけた際の処置は、大学の不正行為に関する規定に準拠します。
- 各問題は、基本的には、それが解けなくても、それ以降の問題を解くことができるように作られている（ただし例外もある）。
よって、問題が解けない場合は悩みすぎずに、次の問題に進もう！
後に追記したくなることを考慮し、各問題の暫定的答案と次の問題との間にスペースを空けておくことを勧める。

以下のような battle of the sexes の利得構造を持つデート・ゲーム $\Gamma = \langle \{1,2\}, A, u \rangle$ を考える。

$1 \setminus 2$	大岡山	自由が丘
大岡山	4, 3	1, 1
自由が丘	0, 0	3, 4

このゲームは、以下の直感に基づく。双方同じ場所で過ごせたほうが嬉しい。しかし、プレーヤー1, 2 それぞれにとって、どちらかと言えば、大岡山、自由が丘がそれぞれ望ましい。

- 1. 純粋戦略のナッシュ均衡を全て記せ。
- 2. プレーヤー1 はプレーヤー2 がどちらに来るか分からないとする。1 のメンタル・モデルの中で 2 が大岡山に来る確率を $p_2 \in [0,1]$ とおく（自由が丘に来る確率は $1 - p_2$ となる）。この一人意思決定問題を決定の木で表現せよ。
- 3. p_2 を比較静学的に動かし、前問のプレーヤー1 の一人意思決定問題を期待効用最大化で解くことにより、
  - p_2 ごとにプレーヤー1 の行く場所を選択し、
  - その時に得られる期待効用 Eu_1 を求めよ。

  同様に、プレーヤー2 もプレーヤー1 がどちらに来るか分からないとする。2 のメンタル・モデルの中で 1 が大岡山に来る確率を $p_1 \in [0,1]$ とおく。p_1 ごとのプレーヤー2 の行く場所も、p_1 を比較静学的に動かし期待効用最大化により求めよ。
- 4. 前問において、$Eu_1(\text{大岡山}) = Eu_1(\text{自由が丘})$, $Eu_2(\text{大岡山}) = Eu_2(\text{自由が丘})$ が満たされる時の p_2, p_1 をそれぞれ p_2^*, p_1^* とおく。問 1 と異なる混合戦略ナッシュ均衡を p_1^*, p_2^* を用いて求めよ。
  混合戦略ナッシュ均衡は、q_1, q_2 をそれぞれ A_1, A_2 上の確率分布として、

  $$(q_1, q_2) = ((q_1(\text{大岡山}), q_1(\text{自由が丘})), (q_2(\text{大岡山}), q_2(\text{自由が丘}))$$

  という形で表現せよ。
- 5.（問 1, 4 で均衡が求められなかった人は、適当に均衡を想定して回答せよ）
  - 一般に、純粋戦略ナッシュ均衡のみを分析対象とする場合には、序数効用で十分である。問 1 で得られた純粋戦略ナッシュ均衡を一つ選び、それがゲーム Γ の利得に任意の単調（増加）変換 monotone transformation を施しても不変であることを示せ。
  - 他方、混合戦略ナッシュ均衡を用いる分析では、基数効用が理論的基盤となる。
    問 4 の混合戦略ナッシュ均衡が一般には Γ の利得の単調変換により変化してしまうことを示せ。
    次に、問 4 の混合戦略ナッシュ均衡が Γ の利得に任意の正のアフィン変換を施しても不変であることを示せ。
- 6. チープトークにより事前にデートの場所の約束を交わすことができるとする。
  自己拘束性・自己識別性をともに満たす約束の候補を列挙し、実際にこれら二つの条件を満たしていることを説明せよ。
- 7.（前問で約束の候補がわからない人は、適当に約束を想定して回答せよ）
  前問の約束と問 2 の p_2 の値を適当に選び、約束前から約束後へのプレーヤー1 の期待効用の変化が負となるような場合を示せ。
  （自己拘束かつ自己識別なので約束は守るとする）

- 8. 問 2 の意思決定問題の完全情報の価値の期待値 EVPI が p_2 の値によらず正であること(知は力なり)を問 3 の結果を引用して示せ。
- 9. 約束を守ることが予測できることによって、プレーヤー1 はプレーヤー2 の選択を確定できることから、約束には情報の価値もありそうだと思えるが、問 7 と問 8 の結果は対照的である。この原因を簡潔に説明せよ。
- 10. ゲーム Γ におけるプレーヤーi の効用は以下の属性からなる加法的多属性効用として

  $$u_i(a) := v_i(a_i) + w_i(a)$$

  と表現できる。

  - $v_i(a_i)$: 自分が行った場所 $a_i \in A_i$ から得られる効用
  - $w_i(a)$: 一緒にいること・いられないことによって得られる効用

  $v(a) = (v_1(a_1), v_2(a_2))$, $w(a) = (w_1(a), w_2(a))$ の具体的な値をそれぞれ利得双行列(二人ゲームと同様の形)で示せ。

以下、誤った主観的メンタル・モデルにもとづいて善意の意思決定をすると最悪の結果が生じ得ることをハイパーゲーム分析を用いて見てみる。

- 11. ゲーム Γ をベース・ゲームとしてプレーしているプレーヤー1, 2 ともに、相手と一緒にいたいのは自分だけで、相手の効用は場所のみによって決まると考えているとする。また、場所の効用については、相手の効用も知っているとする。このような状況を単純ハイパーゲーム (Γ^1, Γ^2) で表現せよ。途中の説明には、前問で導入した効用関数 v, w を入れること(最終的な利得双行列は数値で回答せよ) 。
- 12. 前問で得られた (Γ^1, Γ^2) の主観的ゲームのナッシュ均衡を求めよ。これらの主観的ゲームの均衡の経験との整合性を議論せよ。
- 13. 前問での経験(のみ)を踏まえて、両プレーヤーが主観的ゲームをアップデートし、もう一度ベース・ゲーム Γ をプレーするとする。今度は、どのような単純ハイパーゲームが生じると考えられるか？議論せよ。

次に、ゲーム Γ をステージ・ゲームとする無限回繰り返しゲームについて考える。
利得を

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} u_i(x^t)/T$$

とする。

- 14. 達成可能な利得の組 feasible payoff profile の集合を求め、u_1u_2 空間上に図示せよ。
- 15. フォーク定理 folk theorem をふまえて、待ち合わせ (大岡山, 大岡山), (自由が丘, 自由が丘) を丁度一回ずつ交互に繰り返すのがナッシュ均衡となりうることを示せ。
  (注　繰り返す合意のみならず、他のプレーヤーが合意から逸脱した場合の説明も簡単にすること)
- 16. 前問の均衡が問 4 で得られた Γ の混合戦略均衡を無限回繰り返す均衡をパレート支配していることを示せ。