現代経済の諸問題
Ⅶ 社会厚生汎関数と個人間比較可能性

山邑紘史
mamura1623@yahoo.co.jp

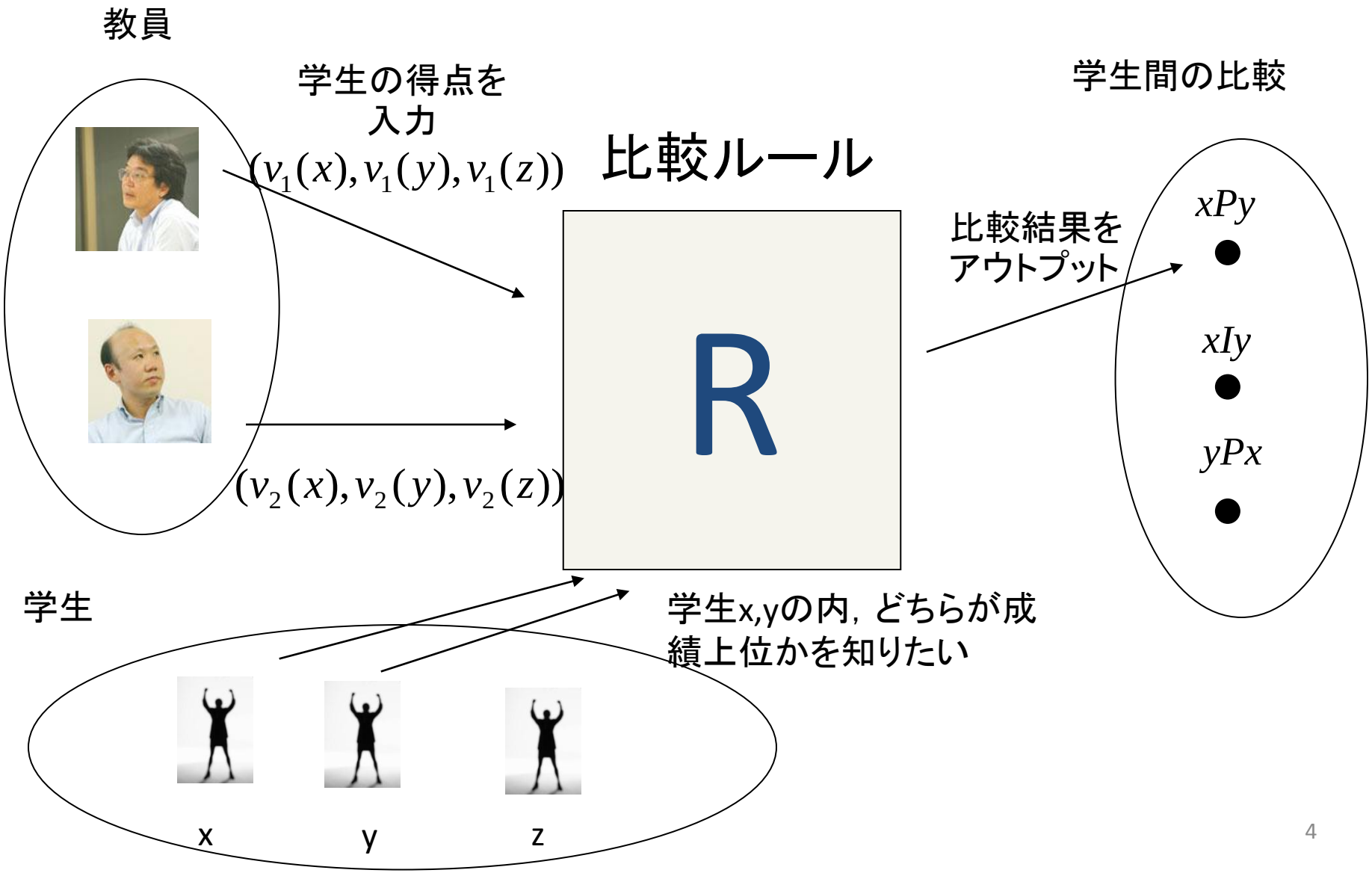
アローの不可能性定理

$\#A \geq 3$ のとき,「定義域の非限定性」「パレート原理」「無関連対象からの独立性」「非独裁制」の4条件をみたす社会厚生関数は存在しない。

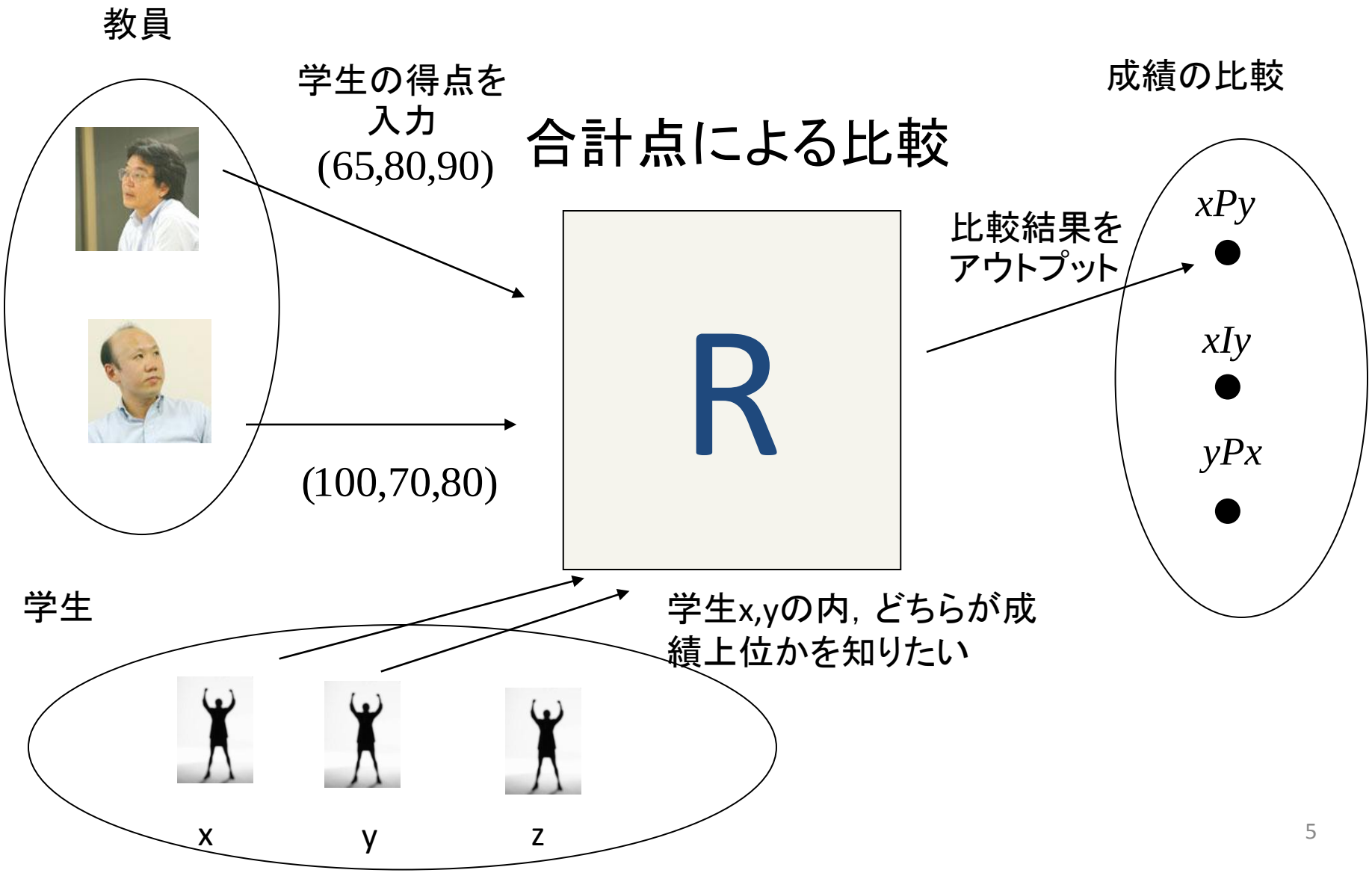
評価の集計

- 一方で「評価を集計して順位を付ける」という状況において，しばしば「定義域の非限定性」「パレート原理」「無関連対象からの独立性」「非独裁制」の4条件を充足するよう順位づけが行われている。
- 例
  - 社会工学専攻の学生の成績順を，複数の科目での評価をもとに決定する
  - スポーツの採点競技（体操・フィギュアスケートetc）において，複数の審査員の採点をもとに選手の順位を決定する。

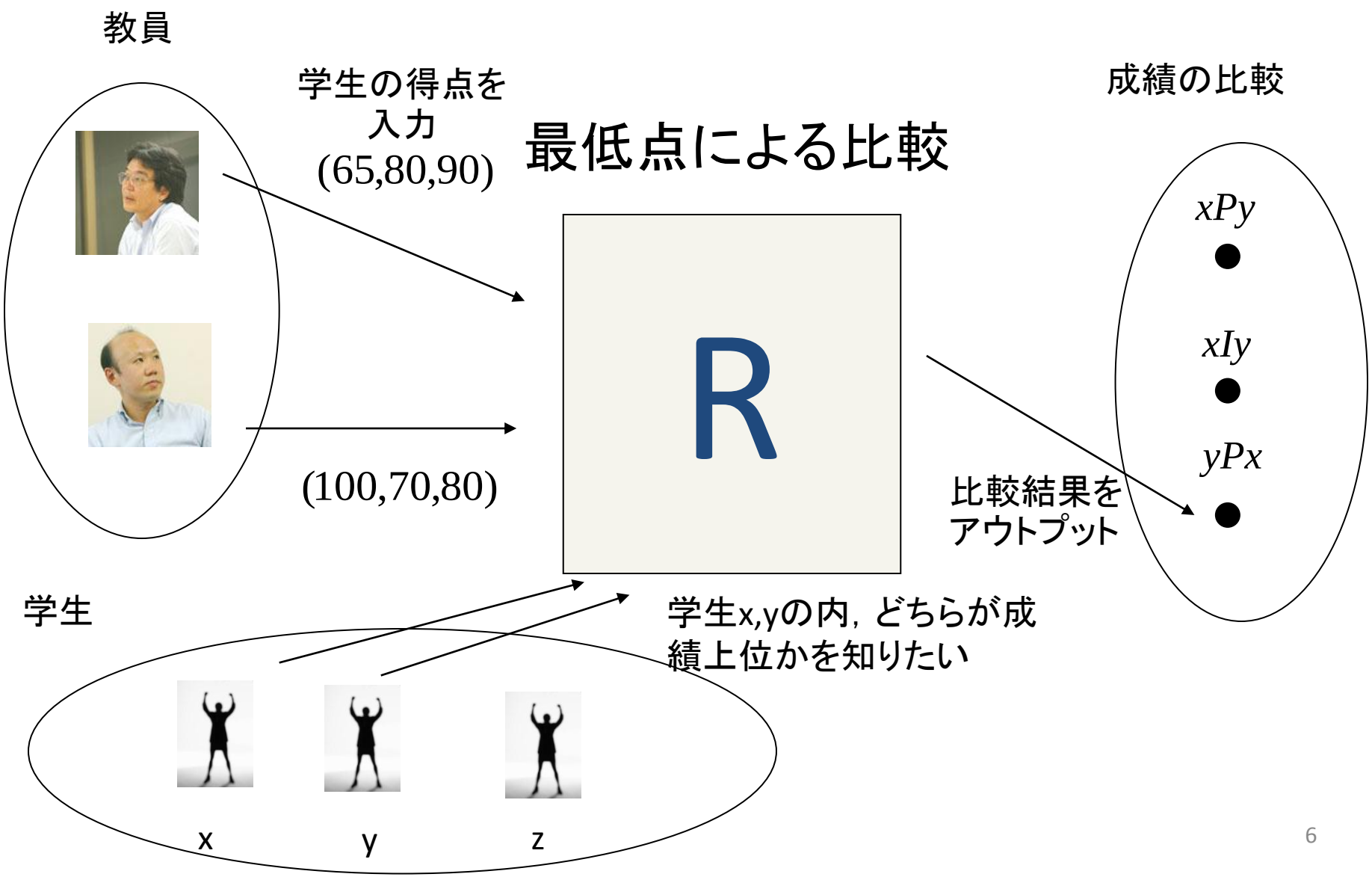
例：社工の学生の順位づけ



例：社工の学生の順位づけ



例：社工の学生の順位づけ



数値に基づく集計と順序に基づく集計

- 合計点による成績の集計
  1. 入力される得点に特に制約はない⇒定義域の非限定性
  2. 全教員がより高い得点を出す学生が成績上位に⇒パレート原理
  3. 学生xと学生yの成績を比較する際に，学生zの成績を利用しない⇒無関連対象からの独立性
  4. ある特定の教科で1位の学生が，全教科合計で1位になるとは限らない⇒非独裁性

⇒アローの定理の4条件をみたす集計がなされている。

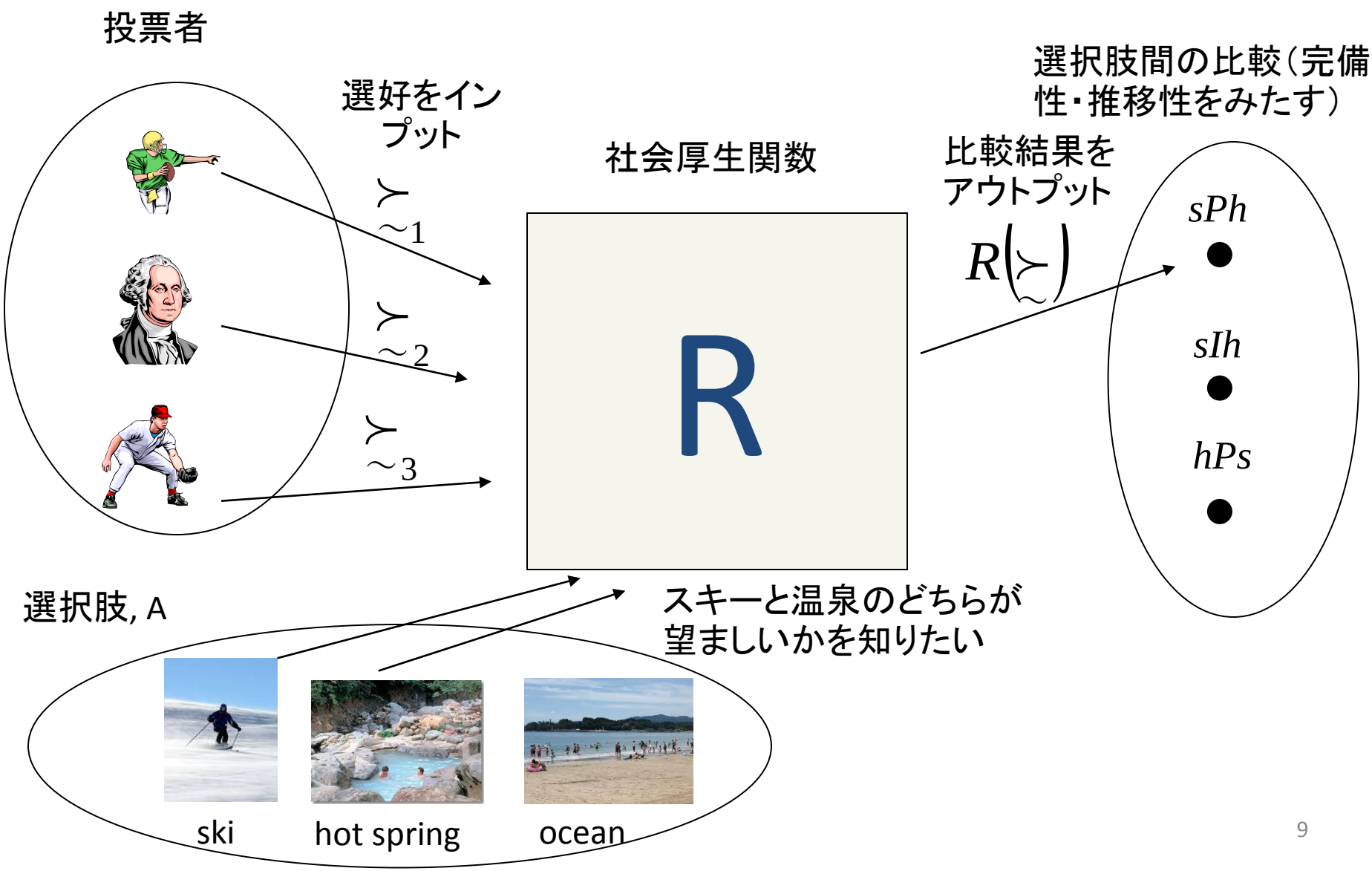
数値に基づく集計と順序に基づく集計

- 社会厚生関数と成績集計の状況との相違点
  - 社会厚生関数においても，成績集計の状況においても，順序に関する情報が入力される点では共通している。
  - しかし，成績集計の状況においては，実際入力されるのは（実数の）得点であるため，実際には順序以外の情報が用いられている可能性がある。

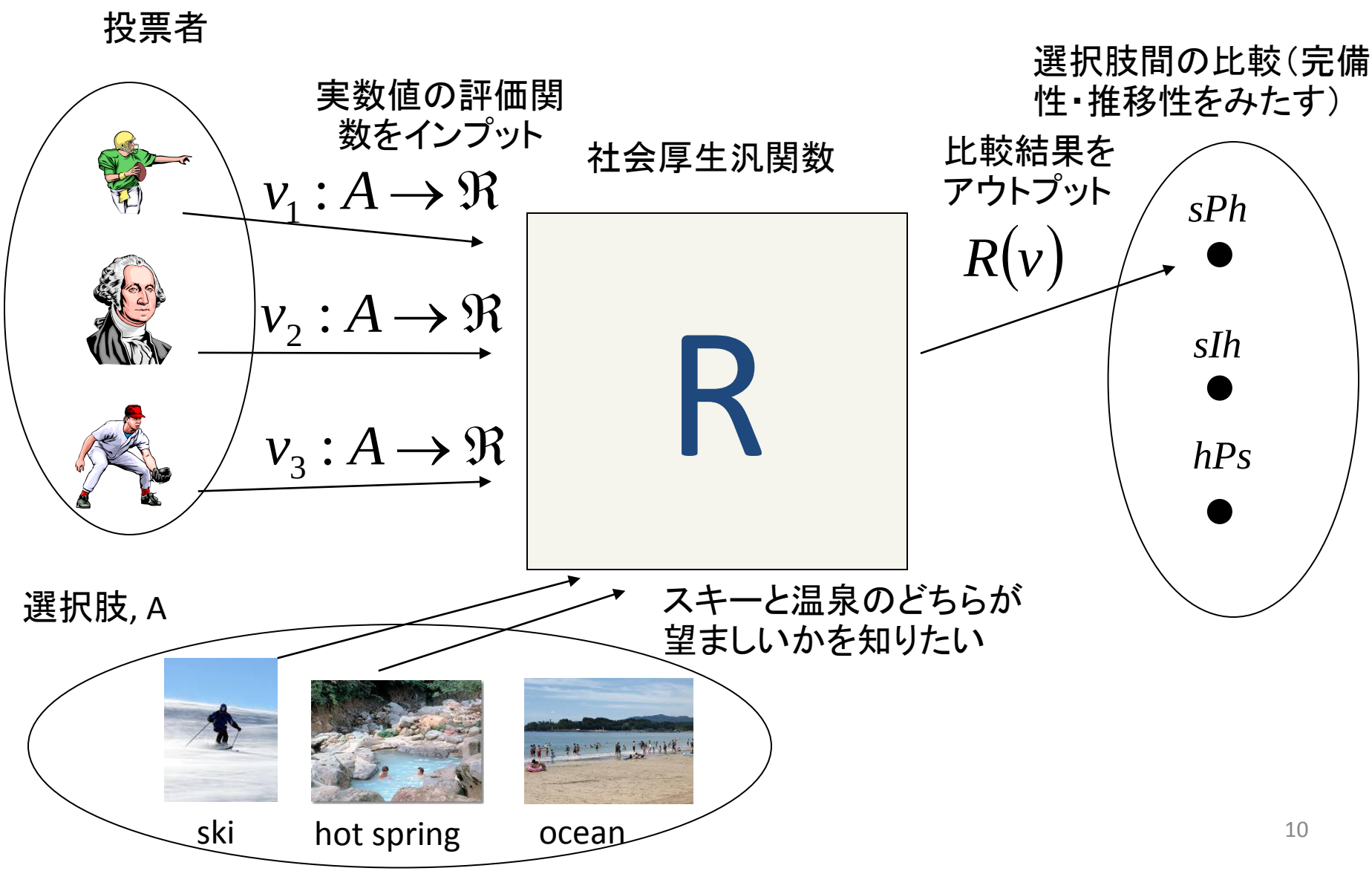
例：

1. 「Y先生の100点と70点との点差」は「M先生の80点と65点との点差」よりも大きい。
2. 「M先生の65点という評価」は「Y先生の70点という評価」よりも低い。

社会厚生関数


投票者
選好をインプット
$\succsim_1$
$\succsim_2$
$\succsim_3$
社会厚生関数
R
比較結果をアウトプット
$R(\succsim)$
選択肢間の比較（完備性・推移性をみたす）
sPh
sIh
hPs
選択肢, A
スキーと温泉のどちらが望ましいかを知りたい
ski
hot spring
ocean

社会厚生汎関数


投票者
実数値の評価関数をインプット
$v_1 : A \to \Re$
$v_2 : A \to \Re$
$v_3 : A \to \Re$
社会厚生汎関数
R
比較結果をアウトプット
$R(v)$
選択肢間の比較（完備性・推移性をみたす）
sPh
sIh
hPs
選択肢, A
スキーと温泉のどちらが望ましいかを知りたい
ski
hot spring
ocean

社会厚生汎関数の例 (1/4)

- 功利主義ルール, R_U

社会厚生汎関数の例 (2/4)

- ナッシュ・ルール, R_N
  （各i∈Nについて $v_i : A \to \Re_{++}$を仮定）

社会厚生汎関数の例(3/4)

- レキシミン・ルール, $R_{L\min}$
- $\theta : \Re^n \to \Re^n$: n次元ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ を小さい順に並べ替える写像

（たとえば $v = (3,4,2,3,2)$ ならば $\theta(v) = (2,2,3,3,4)$ ）

社会厚生汎関数の例(4/4)

- レキシマックス・ルール, $R_{L\max}$
- $\theta : \Re^n \to \Re^n$: n次元ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ を小さい順に並べ替える写像

（たとえば$v = (3,4,2,3,2)$ ならば $\theta(v) = (2,2,3,3,4)$ ）

評価関数の情報的基礎

- 各投票者の評価関数 $v_i : A \to \Re$ はどのような情報を有しているのか？
- $v_i(x) > v_i(y)$ より,

①

ということはわかる。

序数的比較不可能性

- Φ:強単調な実数値関数の全体
- 評価関数が①に関する情報のみを有しているのであれば,

∵

序数的比較不可能性

- したがって，評価関数が序数的比較不可能なとき，任意の$(v_1,\ldots,v_n)$ と任意の$(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\in\Phi^N\equiv\prod_{i\in N}\Phi$ に対して，

が成り立つ。

（　　）

序数的比較不可能性

例：功利主義ルールR_UはΦ^Nに関する情報不変性をみたさない。

∵N={1,2}, A={x,y},$(v_1(x), v_1(y)) = (1,3), (v_2(x), v_2(y)) = (6,3)$

とおく。$(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^N$として$\varphi_1(u) = u^3, \varphi_2(u) = u$をとる。

このとき$xP_U(v_1, v_2)y$であるが,$(\varphi_1(v_1(x)), \varphi_1(v_1(y))) = (1,27)$

であるため，$yP_U(\varphi_1 \circ v_1, \varphi_2 \circ v_2)x$がなりたつ。

序数的比較不可能性

例：レキシミン・ルール$R_{L\min}$は Φ^N に関する情報不変性をみたさない。

∵N={1,2}, A={x,y},$(v_1(x), v_1(y)) = (1,3), (v_2(x), v_2(y)) = (6,3)$

とおく。$(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^N$ として $\varphi_1(u) = u + 10, \varphi_2(u) = u$ をとる。

このとき $yP_{L\min}(v_1, v_2)x$ であるが,

$(\varphi_1(v_1(x)), \varphi_1(v_1(y))) = (11,13)$ であるため,

$xP_{L\min}(\varphi_1 \circ v_1, \varphi_2 \circ v_2)y$ がなりたつ。