アローの不可能性定理の証明

（表 0）

2 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y x>z	y>z x>z	y>z	x>y	
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>z x>z	x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z		y>x
y>z>x	y>z		y>x y>z	y>x y>z z>x	z>x	y>x z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x		z>y	y>x	y>x z>x	z>y z>x	y>x z>y z>x

(Step 1) パレート原理に沿って選択肢間の比較を行う。

(Step 2) 1 行 2 列に注目。以下の 3 通りのケースを考える。

ケース 1： y~z を仮定する。

ケース 2： y>z を仮定する。

ケース 3： z>y を仮定する。

アローの不可能性定理の証明

（表 1-1）

2 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y~z① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y~z	y~z
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>z x>z	y~z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y~z	y>x y~z
y>z>x	y>z	y~z	y>x y>z	y>x y>z z>x	y~z z>x	y>x y~z z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x		z>y	y>x	y>x z>x	z>y z>x	y>x z>y z>x

ケース 1：1 行 2 列において y~z を仮定する。

①IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y~z となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 1-2）

2 \ 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y~z① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y~z	y~z
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>z x>z	x>y② y~z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y~z	y>x y~z
y>z>x	y>z	y~z	y>x y>z	y>x y>z z>x	y>x② y~z z>x	y>x y~z z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x		z>y	y>x	y>x z>x	z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 1：1 行 2 列において y~z を仮定する。

⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y~z となる。

②社会厚生関数の推移性より 3 行 2 列では x>y，4 行 5 列では y>x となる。

・ 3 行 2 列 ⇒ 1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は x>y

・ 4 行 5 列 ⇒ 1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x

⇒このとき社会厚生関数は IIA をみたさない。

⇒1 行 2 列では y>z もしくは z>x がなりたつ。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-1）

2 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y **y>z**① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y>z	y>z
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>z x>z	y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y>z	y>x y>z
y>z>x	y>z	y>z	y>x y>z	y>x y>z z>x	y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x		z>y	y>x	y>x z>x	z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。
IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-2）

2 ＼ 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y>z① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y>z	y>z
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z
y>z>x	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z z>x	**y>x**② y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x	y>x	y>x z>y	y>x	y>x z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。

⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。

②社会厚生関数の推移性より，4 行 5 列において社会的選好は y>x となる。

⇒IIA より，1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-3）

2 ＼ 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y>z① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y>z	y>z
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z
y>z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x② y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y z>x	x>y z>y z>x	z>x	z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x	y>x z>x	y>x z>y **z>x**③	y>x z>x	y>x z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。
⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。
②社会厚生関数の推移性より，4 行 5 列において社会的選好は y>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x となる。
③社会厚生関数の推移性より，6 行 2 列において社会的選好は z>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>x，2 の選好が x>z のとき，社会的選好は z>x となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-4）

2 ＼ 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y>z① x>z	y>z x>z	y>z	x>y y>z	y>z
x>z>y	x>y z>y x>z	x>y z>y x>z	z>y x>z	z>y	x>y z>y	z>y
y>x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z
y>z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x② y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y z>y④ z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x	z>y z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x③	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。
⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。
②社会厚生関数の推移性より，4 行 5 列において社会的選好は y>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x となる。
③社会厚生関数の推移性より，6 行 2 列において社会的選好は z>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>x，2 の選好が x>z のとき，社会的選好は z>x となる。
④社会厚生関数の推移性より，5 行 1 列において社会的選好は z>y となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>y，2 の選好が y>z のとき，社会的選好は z>y となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-5）

2 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y>z① x>z	x>y y>z x>z	x>y y>z	x>y y>z	x>y y>z
x>z>y	x>y z>y x>z	x>y z>y x>z	x>y⑤ z>y x>z	x>y z>y	x>y z>y	x>y z>y
y>x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z	y>x y>z	y>x y>z
y>z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x② y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y z>y④ z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x
z>y>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x③	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。
⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。
②社会厚生関数の推移性より，4 行 5 列において社会的選好は y>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x となる。
③社会厚生関数の推移性より，6 行 2 列において社会的選好は z>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>x，2 の選好が x>z のとき，社会的選好は z>x となる。
④社会厚生関数の推移性より，5 行 1 列において社会的選好は z>y となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>y，2 の選好が y>z のとき，社会的選好は z>y となる。
⑤社会厚生関数の推移性より，2 行 3 列において社会的選好は x>y となる。
⇒IIA より，1 の選好が x>y，2 の選好が y>x のとき，社会的選好は x>y となる。

アローの不可能性定理の証明

（表 2-6）

1 \ 2	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y y>z① x>z	x>y y>z x>z	x>y y>z **x>z**⑥	x>y y>z x>z	x>y y>z x>z
x>z>y	x>y z>y x>z	x>y z>y x>z	**x>y**⑤ z>y x>z	x>y z>y x>z	x>y z>y x>z	x>y z>y x>z
y>x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z x>z
y>z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x y>z z>x	y>x② y>z z>x	y>x y>z z>x
z>x>y	x>y z>y④ z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x	x>y z>y z>x
z>y>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x③	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 2：1 行 2 列において y>z を仮定する。
⇒IIA より，1 の選好が y>z，2 の選好が z>y のとき，社会的選好は y>z となる。
②社会厚生関数の推移性より，4 行 5 列において社会的選好は y>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が y>x，2 の選好が x>y のとき，社会的選好は y>x となる。
③社会厚生関数の推移性より，6 行 2 列において社会的選好は z>x となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>x，2 の選好が x>z のとき，社会的選好は z>x となる。
④社会厚生関数の推移性より，5 行 1 列において社会的選好は z>y となる。
⇒IIA より，1 の選好が z>y，2 の選好が y>z のとき，社会的選好は z>y となる。
⑤社会厚生関数の推移性より，2 行 3 列において社会的選好は x>y となる。
⇒IIA より，1 の選好が x>y，2 の選好が y>x のとき，社会的選好は x>y となる。
⑥社会厚生関数の推移性より，1 行 4 列において社会的選好は x>z となる。
⇒IIA より，1 の選好が x>z，2 の選好が z>x のとき，社会的選好は x>z となる。
ケース 2 においては 1 が独裁者となっている。

アローの不可能性定理の証明

（表 3）

2 \ 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x>y y>z x>z	x>y z>y x>z	y>z x>z	y>z	x>y	
x>z>y	x>y x>z	x>y z>y x>z	x>z		x>y z>y	z>y
y>x>z	y>z x>z	x>z	y>x y>z x>z	y>x y>z		y>x
y>z>x	y>z		y>x y>z	y>x y>z z>x	z>x	y>x z>x
z>x>y	x>y	x>y z>y		z>x	x>y z>y z>x	z>y z>x
z>y>x		z>y	y>x	y>x z>x	z>y z>x	y>x z>y z>x

①ケース 3：1 行 2 列において z>y を仮定する。（以下の証明は宿題）