現代経済の諸問題
Ⅲ メイの定理

山邑紘史
(mamura1623 at yahoo.co.jp)

多数決ルール

- 多数決ルール, R_M

投票のパラドクス

- 多数決ルールの問題点：

多数決ルールに基づいて選好の集計を行うと，

をみたさない集計結果が発生しうる。

＝

投票のパラドクスが発生するには？

- 集計ルール R が推移性をみたさない
  - ある選択肢 $x, y, z \in A$ について

  ［　　］であるが［　　］

⇒ 推移性を充足しない状況は，
選択肢が［　　］以上ないと生じない。

⇒選択肢が［　　］のときには，
投票のパラドクスは起こりえない。

多数決ルールの特徴づけ

- 選択肢が2個しかないときには，多数決ルールの下で投票のパラドクスは生じない。
- 一方で，多数決ルールのみが有しているような長所はあるのだろうか？

・・・メイの定理による特徴づけ

多数決ルール R_M が有している性質

1. 定義域の非限定性 (UD: Unrestricted Domain)

・・・多数決ルールの下では，あらゆる状況において，選択肢間の望ましさを比較することができる。

多数決ルール R_M が有している性質

2. 匿名性 (AN: Anonymity)

・・・多数決ルールの下では，投票者の名前に依存した集計は行われない。

多数決ルール R_M が有している性質

3. 中立性 (NE: Neutrality)

・・・多数決ルールの下では，選択肢の名前に依存した集計は行われない。

多数決ルール R_M が有している性質

4. 正の感応性 (NE: Positive Responsiveness)

・・2選択肢x,y間において，社会的評価が無差別であるとしよう。このとき，ある投票者がxに対する評価を上げれば，xの社会的評価も上げる必要がある。

メイの定理

- 「定義域の非限定性」「匿名性」「中立性」「正の感応性」の4条件をみたす選好集計ルールは，多数決ルールに限られる。

メイの定理の証明 (1/8)

【Step 1】Rが中立性をみたしているならば, Rは以下の条件（無関連対象からの独立性）をみたす。

無関連対象からの独立性 (IIA: Independence of Irrelevant Alternatives):

・・・2選択肢x,y間の社会的評価は，各投票者のx,y間の選好のみに応じて決定される。

メイの定理の証明 (2/8)

【Step 1】の証明

中立性の条件内の2つの選択肢の組 $(x, y), (z, w)$ について,

を代入する。

⇒

ならば が言える。■

メイの定理の証明 (3/8)

【Step 1】より，2選択肢 x, y 間の社会的評価は，各人の x, y 間の選好のみによって定まる。

- を 1
- を 0
- を -1

と表記する。

選好集計ルールがIIAをみたしているならば，x, y 間における選好の集計は以下の関数で表現される

メイの定理の証明 (4/8)

【Step 2】R が定義域の非限定性，匿名性，中立性をみたしているとする。このとき，

【Step 2】の証明

Rは匿名性をみたしているので，投票者名を入れ替え

$$\{i \in N : x \succ_i y\} = \{1, 2, \ldots, k\}$$

$$\{i \in N : y \succ_i x\} = \{n-k+1, \ldots, n\}$$

としても差し支えない。

メイの定理の証明 (5/8)

このとき，仮に

$$f_{xy}(\underbrace{1,\ldots,1}_{\text{k人}},0,\ldots 0,\underbrace{-1,\ldots,-1}_{\text{k人}})=1$$

だとすると，中立性より

となる。しかしこれは匿名性より，

となることと矛盾する。

メイの定理の証明 (6/8)

したがって,

$$f_{xy}(\underbrace{1,\ldots,1}_{\text{k人}},0,\ldots 0,\underbrace{-1,\ldots,-1}_{\text{k人}}) \neq \boxed{}$$

同様に

$$f_{xy}(\underbrace{1,\ldots,1}_{\text{k人}},0,\ldots 0,\underbrace{-1,\ldots,-1}_{\text{k人}}) \neq \boxed{}$$

なので $f_{xy}(1,\ldots,1,0,\ldots 0,-1,\ldots,-1) = \boxed{}$

つまり, xIy ■

メイの定理の証明 (7/8)

【Step 3】R が定義域の非限定性，匿名性，中立性，正の感応性をみたしているとする。このとき，

【Step 3】の証明

Rは匿名性をみたしているので，投票者名を入れ替え

$$\{i \in N : x \succ_i y\} = \{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l\}$$

$$\{i \in N : y \succ_i x\} = \{n-k+1, \ldots, n\}$$

としても差し支えない。

メイの定理の証明 (8/8)

【Step 2】より

$$f_{xy}(\underbrace{1,\ldots,1}_{k人},0,\ldots 0,\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k人}) = \boxed{}$$

なので，正の感応性より，

$$\boxed{}$$

が成立する。したがって，xPy ■