現代経済の諸問題
Ⅸ ナッシュ遂行

山邑紘史
mamura1623@yahoo.co.jp

非協力ゲーム理論と社会選択

- 耐戦略性：他の投票者がどのような選好を表明しようとも，真の選好を表明することで（投票者本人にとって）最も好ましい選択肢が選ばれる

非協力ゲーム理論の言葉で言い換えれば，

- 耐戦略性：

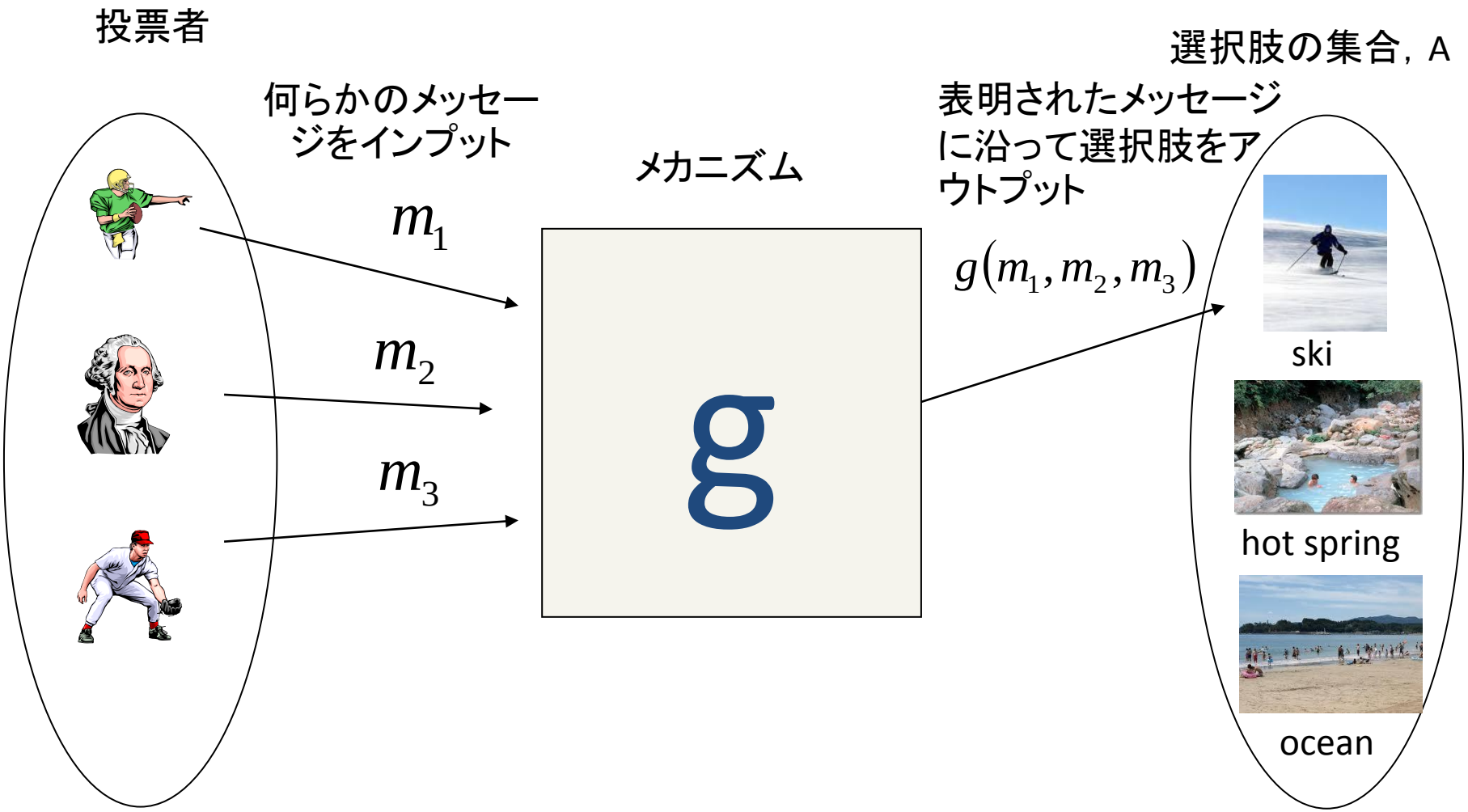
耐戦略的な社会選択関数の下では，「全投票者が正直に自らの選好を表明する」のが支配戦略均衡となる。

非協力ゲーム理論と社会選択

- 非協力ゲーム理論においては，ゲームの結果を予想するときに，支配戦略均衡以外にも
  という概念が用いられる。
- 投票者の戦略的な行動を前提とした際に，どのような社会的意思決定が可能となるのかを検討

・・・遂行理論

メカニズム（定義）


投票者
何らかのメッセージをインプット
m_1
m_2
m_3
メカニズム
g
表明されたメッセージに沿って選択肢をアウトプット
$g(m_1, m_2, m_3)$
選択肢の集合，A
ski
hot spring
ocean

メカニズム（定義）

- メカニズムは，
  -
  -

の組$\Gamma = ((M_1, \ldots, M_n), g)$によって定義される。

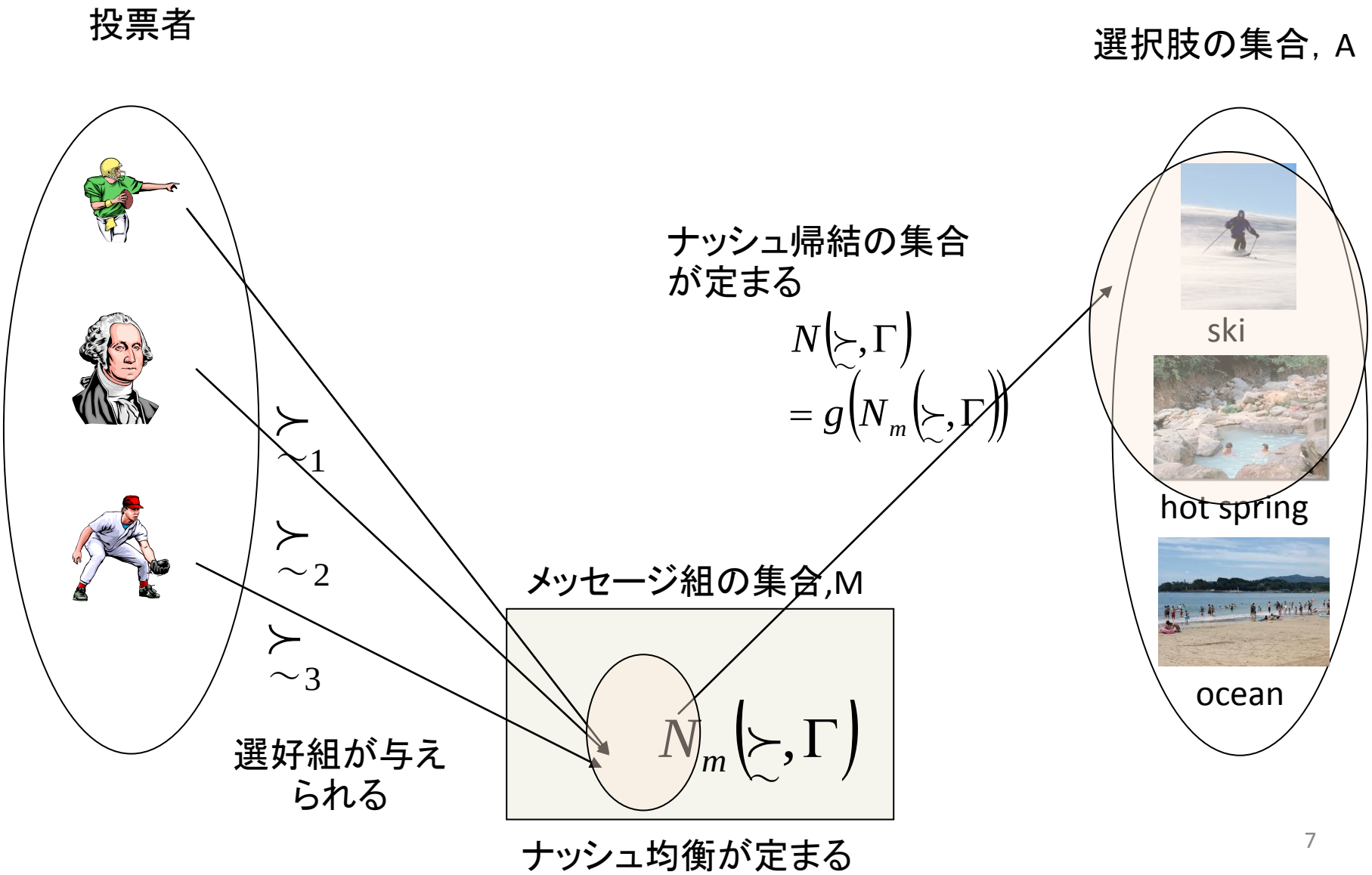
ナッシュ均衡（定義）

- 選好組$\succsim = (\succsim_1, \ldots, \succsim_n)$とメカニズム$\Gamma = ((M_1, \ldots, M_n), g)$の下，メッセージの組$m = (m_1, \ldots, m_n)$がナッシュ均衡

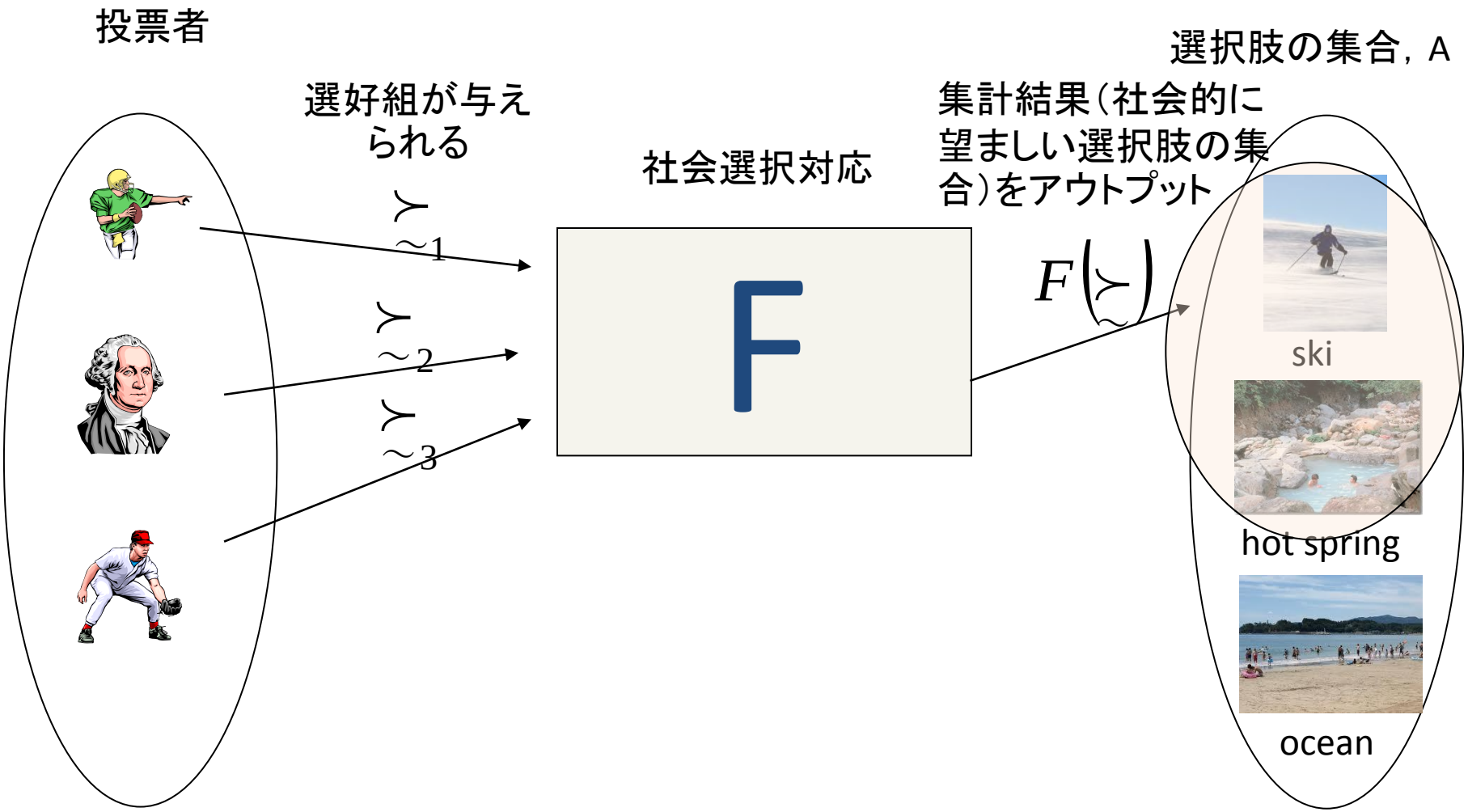
$\Leftrightarrow$

- $N_m(\succsim, \Gamma)$: 選好組$\succsim$とメカニズムΓの下でのナッシュ均衡の集合
- $N(\succsim, \Gamma) \equiv g(N_m(\succsim, \Gamma))$:選好組$\succsim$とメカニズムΓの下，ナッシュ均衡において選ばれる選択肢の集合（ナッシュ帰結の集合）

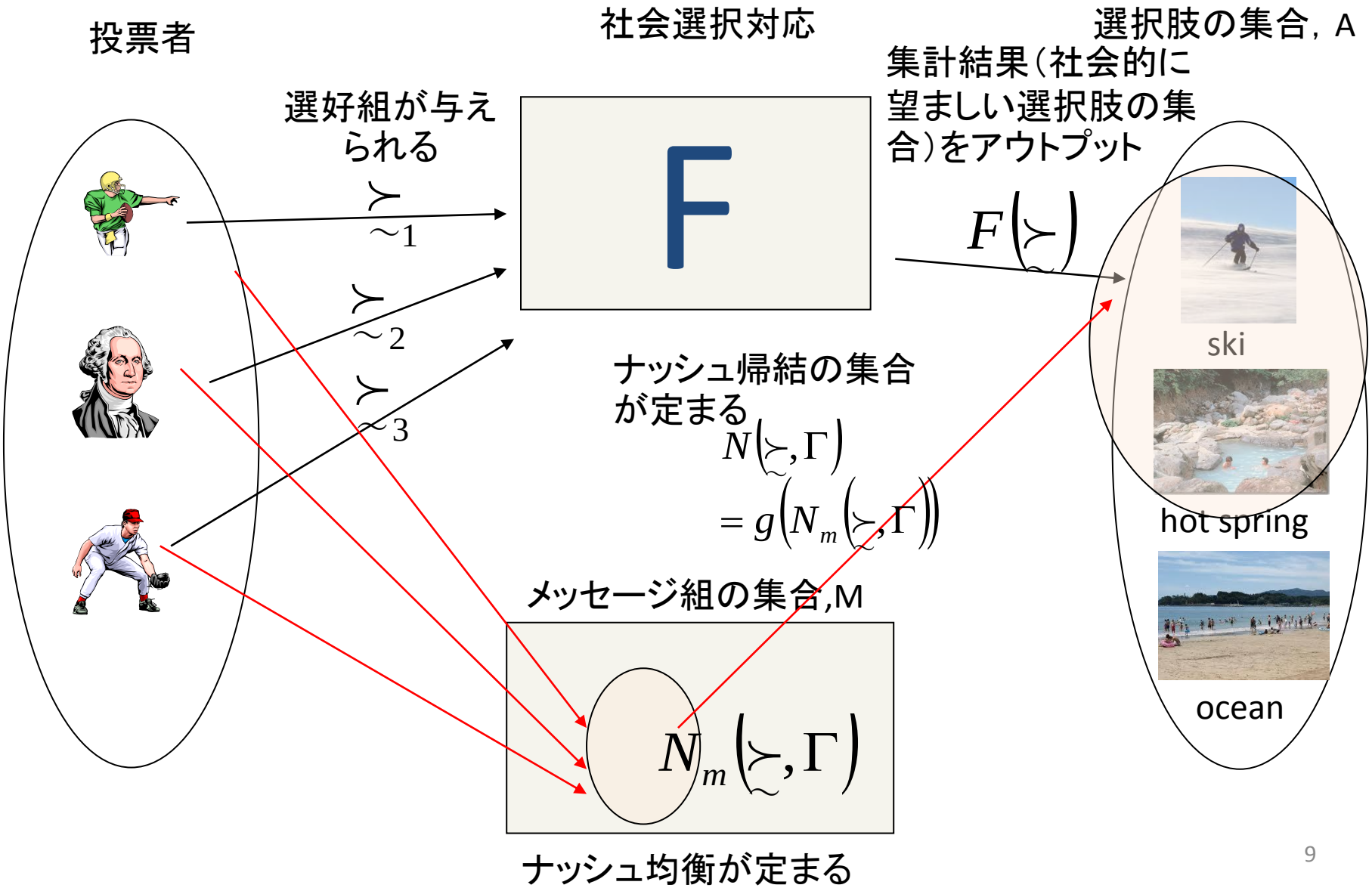
メカニズムの帰結


投票者
選択肢の集合，A
ナッシュ帰結の集合
が定まる
$N(\succsim, \Gamma)$
$= g(N_m(\succsim, \Gamma))$
$\succsim_1$
$\succsim_2$
$\succsim_3$
ski
hot spring
ocean
メッセージ組の集合,M
$N_m(\succsim, \Gamma)$
選好組が与え
られる
ナッシュ均衡が定まる

社会選択対応（定義）


投票者
選好組が与えられる
$\succsim_1$
$\succsim_2$
$\succsim_3$
社会選択対応
F
集計結果（社会的に望ましい選択肢の集合）をアウトプット
$F(\succsim)$
選択肢の集合，A
ski
hot spring
ocean

社会選択対応のナッシュ遂行



ナッシュ遂行（定義）

- メカニズム Γ が社会選択対応Fをナッシュ遂行する。

⇔ 任意の選好組 $\succsim$ において，

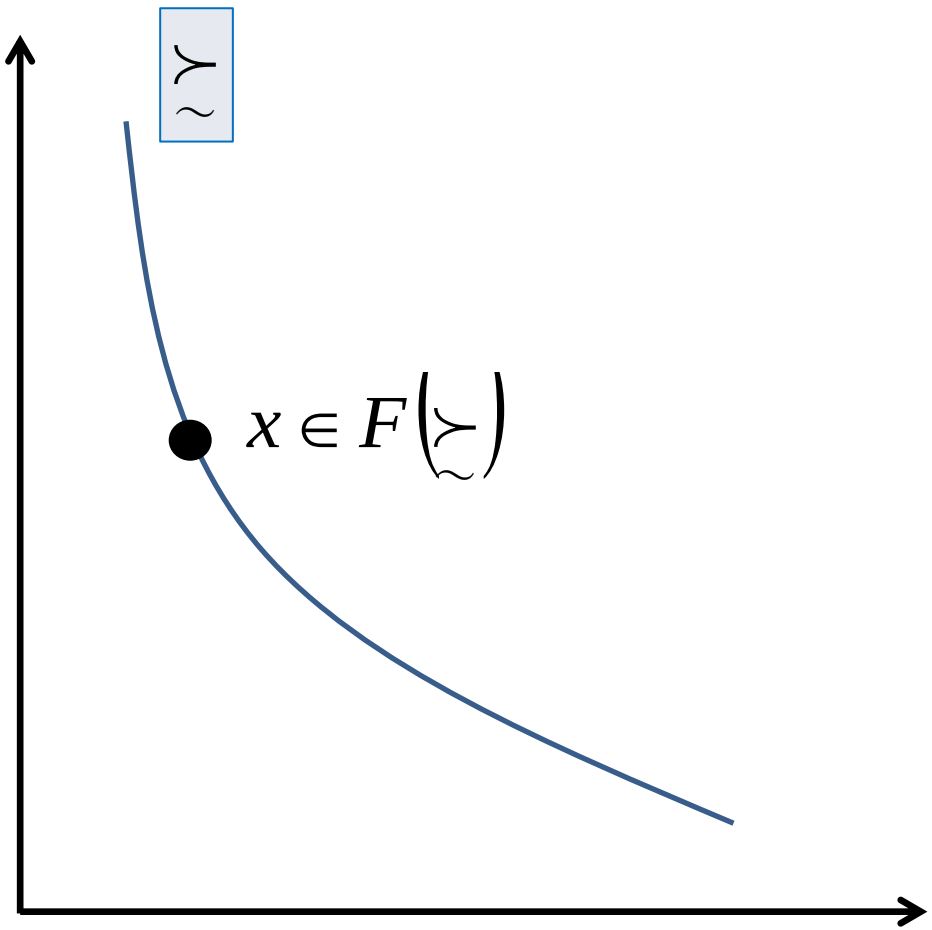
・・・ナッシュ遂行されるようなメカニズムが存在するような社会選択対応はどのようなものか？

マスキン単調性

- 社会選択対応Fがマスキン単調性をみたす

⇔

マスキン単調性



拒否権の不在性

- 社会選択対応Fが拒否権の不在性をみたす

⇔

マスキンの定理

1. 社会選択対応Fをナッシュ遂行するようなメカニズムが存在するならば，Fはマスキン単調性をみたす。
2. $\#N \geq 3$ とする。社会選択対応Fがマスキン単調性と拒否権の不在性をみたすならば，Fをナッシュ遂行するようなメカニズムが存在する。

マスキンの定理の証明(1/8)

- 1.の証明

メカニズムΓが社会選択対応Fをナッシュ遂行する。
このとき，任意の $\succsim$,任意の $x \in F(\succsim)$ について

$$m = (m_1, \ldots, m_n) \in N_m(\succsim, \Gamma),\ g(m) = x$$

をみたすメッセージの組mが存在する。

$m \in N_m(\succsim, \Gamma)$ より，$\forall i \in N, \forall m_i' \in M_i \quad x = g(m) \succsim_i g(m_i', m_{-i})$

$\Rightarrow g(M_i, m_{-i}) \subseteq L(x, \succsim_i), \forall i \in N$

マスキンの定理の証明(2/8)

今，選好組$\succsim'$が$\forall i \in N, L\left(x, \succsim_i\right) \subseteq L\left(x, \succsim_i'\right)$をみたすとすると，

$$\forall i \in N, g\left(M_i, m_{-i}\right) \subseteq L\left(x, \succsim_i\right) \subseteq L\left(x, \succsim_i'\right)$$

なので，

$$\forall i \in N, \forall m_i' \in M_i, g\left(m_i, m_{-i}\right) = x \succsim_i' g\left(m_i', m_{-i}\right)$$

となる。したがって，$m \in N_m\left(\succsim', \Gamma\right), g(m) = x$ より，$x \in N\left(\succsim', \Gamma\right) = F\left(\succsim'\right)$ を得る。■

マスキンの定理の証明(3/8)

- 2.の証明

マスキン単調性及び拒否権の不在性をみたす社会選択対応Fを，以下のメカニズムがナッシュ遂行する。

- メッセージの集合

マスキンの定理の証明(4/8)

- 帰結関数

【ルール1】 $\forall i \in N, \left(\succsim^i, a^i\right) = \left(\succsim, a\right)$ でかつ $a \in F\left(\succsim\right)$

⇒

【ルール2】あるjが存在して $\forall i \neq j, \left(\succsim^i, a^i\right) = \left(\succsim, a\right)$ で $a \in F\left(\succsim\right)$

⇒

【ルール3】その他の場合

⇒

マスキンの定理の証明(5/8)

(Step 1)任意の$a \in F(\succsim)$ について $a \in N(\succsim, \Gamma)$

証明: 任意の$i \in N$ について$m_i = (\succsim, a, z_i)$とする。

このとき任意の$i \in N$について（【ルール2】を通じて）

$g(M_i, m_{-i}) = L(a, \succsim_i)$ なので,$(m_1, \ldots, m_n) \in N_m(\succsim, \Gamma)$ で,

$g(m_1, \ldots, m_n) = a$ ■

マスキンの定理の証明(6/8)

(Step 2)任意の $a \in N(\succsim, \Gamma)$ について $a \in F(\succsim)$

証明:

(Case 1) $(m_1, \ldots, m_n) \in N(\succsim, \Gamma)$ で【ルール3】適用時

任意の $i \in N$ について, 【ルール3】を通じて,

$g(M_i, m_{-i}) = A$ とできるため, $(m_1, \ldots, m_n) \in N(\succsim, \Gamma)$ より

$L(g(m), \succsim_i) \supset g(M_i, m_{-i}) = A, \ \forall i \in N$ である。したがって,

拒否権の不在性より, $g(m) \in F(\succsim)$ ■

マスキンの定理の証明(7/8)

(Case 2) $(m_1,\ldots,m_n)\in N(\succsim,\Gamma)$ で【ルール2】適用時

異なるメッセージを表明しているのは投票者jであるとする。任意の$i\neq j$ について, $m_i'\in M_i\setminus\{m_j,m_i\}$をみたすメッセージを発することで, 【ルール3】を通じて, $g(M_i,m_{-i})=A$とできる。ここで$(m_1,\ldots,m_n)\in N(\succsim,\Gamma)$より $L(g(m),\succsim_i)\supset g(M_i,m_{-i})=A,\ \forall i\neq j$ である。したがって, $\#\{k\in N: g(m)\succsim_k x,\forall x\in A\}\geq \# N\setminus\{j\}=n-1$

であるため, 拒否権の不在性より, $g(m)\in F(\succsim)$ ■

マスキンの定理の証明(8/8)

(Case 3) $(m_1,\ldots,m_n)\in N(\succsim,\Gamma)$ で【ルール1】適用時 $m_i=(\succsim',a,z_i),\forall i\in N$ とおく。このとき，任意の $i\in N$ について，【ルール2】を通じて $g(M_i,m_{-i})=L(a,\succsim_i')$ で，$(m_1,\ldots,m_n)\in N(\succsim,\Gamma)$ なので，

$$L(a,\succsim_i)\supseteq L(a,\succsim_i'),\quad \forall i\in N$$

が成立。ここで $a\in F(\succsim')$ より，Fのマスキン単調性から $a\in F(\succsim)$ が言える。■