シャープレイ値の費用分担問題への応用

練習問題２－３

同じ方向に家のあるA，B，Cの３人が大岡山駅からタクシーに相乗りし一番遠くに家のあるCが料金を支払っておき，翌日清算することにした。メーターでは，Aの家までは1200円，Bの家までは2000円であり，最終的にCの家までは，２500円かかった。シャープレイ値の考え方に従えば，A及びBは，翌日いくらずつCに支払えばよいか。また，仁の考え方ではどうか。

特性関数（費用軽減額）

$v(ABC) = (1200+2000+2500) - 2500 = 3200$

$v(AB) = (1200+2000) - 2000 = 1200$, $v(AC) = 1200$, $v(BC) = 2000$

$v(A) = v(B) = v(C) = 0$

費用分担ゲーム

特性関数（費用軽減額）

v(ABC) = 3200, v(AB) = 1200, v(AC) = 1200, v(BC) = 2000

v(A) = v(B) = v(C) = 0

貢献度

	A	B	C
A←B← C	0	1200	2000
A←C← B	0	2000	1200
B←A←C	1200	0	2000
B←C←A	1200	0	2000
C←A←B	1200	2000	0
C←B←A	1200	2000	0
	4800/6	7200/6	7200/6

シャープレイ値

(800, 1200, 1200)

費用分担

(400, 800, 1300)

費用分担ゲーム

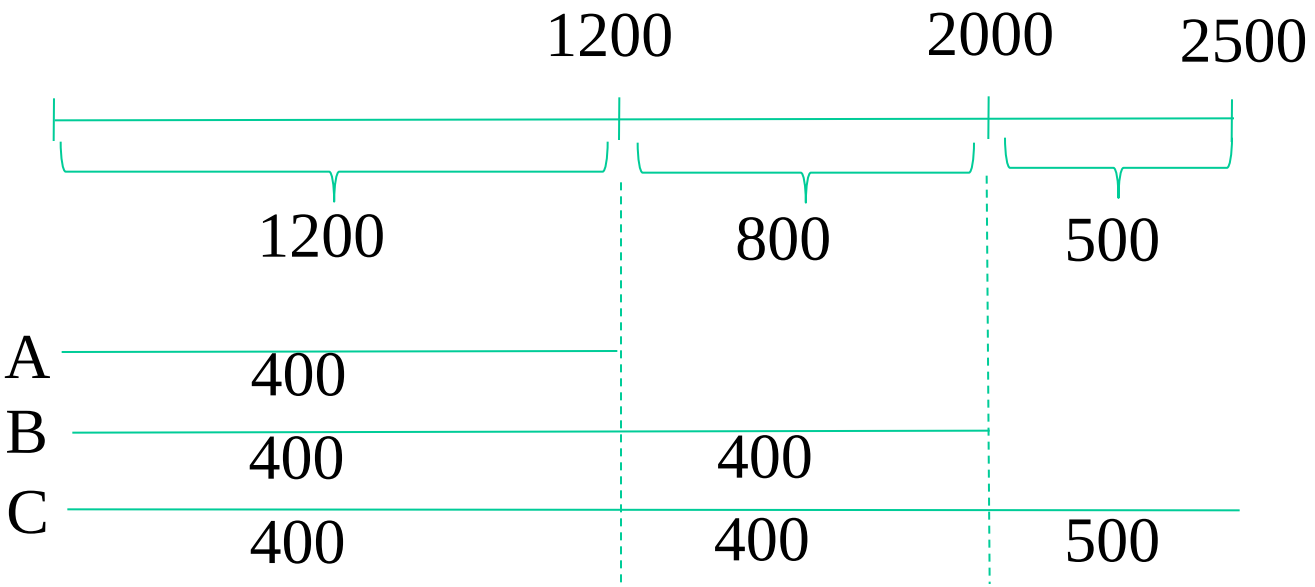
特性関数（費用軽減額）

$v(ABC) = 3200,\ v(AB) = 1200,\ v(AC) = 1200,\ v(BC) = 2000$

$v(A) = v(B) = v(C) = 0$

シャープレイ値　(800, 1200, 1200)

費用分担　(400, 800, 1300)



節約ゲームと費用ゲーム

節約ゲーム（費用軽減額）

$v(ABC) = 3200,\ v(AB) = 1200,\ v(AC) = 1200,\ v(BC) = 2000$

$v(A) = v(B) = v(C) = 0$

費用ゲーム（費用）

$C(ABC) = 2500,\ C(AB) = 2000,\ C(AC) = 2500,\ C(BC) = 2500$

$C(A) = 1200,\ C(B) = 2000,\ C(C) = 2500$

$v(S) = \Sigma_{i\in S}\, C(\{i\}) - C(S)$ $\qquad$ $x_i = C(\{i\}) - c_i \quad i = A, B, C$

$(c_A, c_B, c_C) \in C$ での コア $\leftrightarrow$ $\Sigma_{i\in S}\, c_i \le C(S) \ \forall\, S \subseteq \{A,B,C\}$

$$\Sigma_{i\in S}\, c_i \le C(S) \leftrightarrow \Sigma_{i\in S}\, C(\{i\}) - \Sigma_{i\in S}\, x_i \le C(S)$$
$$\leftrightarrow \Sigma_{i\in S}\, x \ge \Sigma_{i\in S}\, C(\{i\}) - C(S)_{\ i} = v(S)$$

シャープレイ値 $\quad$ v 費用軽減 $\quad$ (800, 1200, 1200)

C 費用 $\quad$ (400, 800, 1300)

滑走路の補修費用の分担

ある空港を3つの航空会社A，B，Cが利用している。それぞれ小型機，中型機，大型機の3種類の飛行機を保有しており，1年あたりの離着陸回数は，以下のとおりである。

Ａ：　大型機300回，中型機200回，小型機100回

Ｂ：　大型機200回，中型機200回，小型機100回

Ｃ：　大型機100回，中型機100回，小型機200回

この空港の3000mの滑走路のうち，大型機は3000mすべてを，中型機は2500mを，小型機は1500mを利用する。この空港では，1年に1回，滑走路の補修を行う。その際には3000mの滑走路すべてを同じように補修しなければならず，1mあたり10万円の費用を要する。

（問題）　補修費用の総額10万x3000＝3億円を，Ａ，Ｂ，C3社でどのように分担すればよいか？

費用ゲームとしての定式化

プレイヤー：各飛行機の各離着陸　1500人ゲーム

N_B, N_M, N_S：

大型機(B)，中型機(M)，小型機(S)のプレイヤーの集合

$|N_B| = 600,\ |N_M| = 500,\ |N_S| = 400$

$N = N_B \cup N_M \cup N_S$

費用関数

$c_B = 30,\ c_M = 25,\ c_S = 15$（単位：千万円）

$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset,\ i = B, M, S \}$

公理によるシャープレイ値の解法

N_B, N_M, N_S :大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$|N_B| = 600,\ |N_M| = 500,\ |N_S| = 400$

$N = N_B \cup N_M \cup N_S$

$C(S) = \max\{\ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset,\ i = B, M, S\}$ $\quad c_B = 30,\ c_M = 25,\ c_S = 15$

(N, C_B) $\quad C_B(S) = \begin{cases} c_B - c_M & S \cap N_B \neq \emptyset \\ 0 & S \cap N_B = \emptyset \end{cases}$

$i \notin N_B \rightarrow$ i は<u>ナルプレイヤー</u>

$i, j \in N_B \rightarrow$ i, j は<u>対称</u>

$\phi_i(C_B) = \begin{cases} (c_B - c_M)/\ |N_B| = (30-25)/600 = 1/120 & i \in N_B \\ 0 & i \notin N_B \end{cases}$

公理によるシャープレイ値の解法

N_B, N_M, N_S :大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$|N_B| = 600,\ |N_M| = 500,\ |N_S| = 400$

$N = N_B \cup N_M \cup N_S$

$C(S) = \max\{\ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset,\ i = B, M, S\}$ $\quad c_B = 30,\ c_M = 25,\ c_S = 15$

(N, C_M) $\quad C_M(S) = \begin{cases} c_M - c_S & S \cap (N_B \cup N_M) \neq \emptyset \\ 0 & S \cap (N_B \cup N_M) = \emptyset \end{cases}$

$i \notin N_B \cup N_M$ はナルプレイヤー, $i, j \in N_B \cup N_M$ は対称

$$\phi_i(C_M) = \begin{cases} (c_M - c_S)/\,|N_B \cup N_M| = (25-15)/(600+500) = 1/110 & i \in N_B \cup N_M \\ 0 & i \notin N_B \cup N_M \end{cases}$$

公理によるシャープレイ値の解法

N_B, N_M, N_S :大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$|N_B| = 600,\ |N_M| = 500,\ |N_S| = 400$

$N = N_B \cup N_M \cup N_S$

$C(S) = \max\{\ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset,\ i = B, M, S\}$ $\quad c_B = 30,\ c_M = 25,\ c_S = 15$

(N, C_S) $\quad C_S(S) = c_S$ $\quad S \cap (N_B \cup N_M \cup N_S) = S \cap N \neq \emptyset$

$i, j \in N_B \cup N_M \cup N_S$ は<u>対称</u>

$\phi_i(C_S) = c_S / |N| = 15/(600+500+400) = 1/100$ $\quad i \in N$

(N, C) $\quad C(S) = C_B(S) + C_M(S) + C_S(S) \quad \forall S \subseteq N$

<u>ゲームの和に関する性質</u>

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad \phi_i(C) &= 1/120+1/110+1/100 && i \in N_B \\
&= 1/110+1/100 && i \in N_M \\
&= 1/100 && i \in N_S
\end{aligned}
$$

シャープレイ値による各社の費用分担

N_B, N_M, N_S :大型機(B)，中型機(M)，小型機(S)のプレイヤーの集合

$|N_B| = 600,\ |N_M| = 500,\ |N_S| = 400$

$N = N_B \cup N_M \cup N_S$

$C(S) = \max\{\ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset,\ i = B, M, S\}$ $\quad c_B = 30,\ c_M = 25,\ c_S = 15$

(N, C) $\quad C(S) = C_B(S) + C_M(S) + C_S(S) \quad \forall S \subseteq N$

$$\phi_i(C) = 1/120 + 1/110 + 1/100 \qquad i \in N_B$$
$$= 1/110 + 1/100 \qquad i \in N_M$$
$$= 1/100 \qquad i \in N_S$$

A社： 大型機300，中型機200，小型機100回

$\rightarrow\ 300(1/120+1/110+1/100)+200(1/110+1/100)+100 \times (1/100)$

B,C社も同様

次回までの課題

滑走路補修費用の分担問題について，授業で求めたシャープレイ値がこのゲームのコアに入っていることを示せ。（注意：費用ゲームとして定式化されているので，$\Sigma_{i \in S} \phi_i(C) \leq C(S) \ \ \forall S \subseteq N$ を示せばよい。）