コアと仁の応用例

市場ゲーム　－　コアの応用例

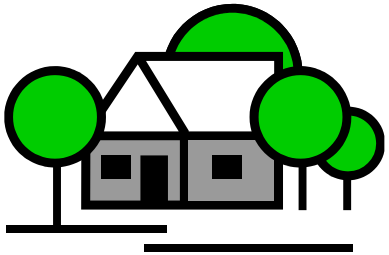
破産問題　－　仁の応用例

市場ゲーム

財の交換市場の協力ゲームによる分析

事例6－2

A　1000万円



B
1200万円

C
1500万円

C の評価　1500万円

B の評価　1200万円

A の評価　1000万円

A の家は B, C のどちらにいくらの価格で売られるか　？

事例６－２の特性関数形ゲーム表現

プレイヤーの集合　$N = \{A, B, C\}$

- C の評価　１５００万円
- B の評価　１２００万円
- A の評価　１０００万円

特性関数

$$v(\{A,B,C\}) = 5,$$

$$v(\{A,B\}) = 2,\ \ v(\{A,C\}) = 5,\ \ v(\{B,C\}) = 0,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

事例６－２のコア

特性関数　$v(\{A,B,C\}) = 5,$

$v(\{A,B\}) = 2,\ \ v(\{A,C\}) = 5,\ \ v(\{B,C\}) = 0,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

コア　$C = \{x=(x_A,x_B,x_C) \mid x_A+x_B+x_C=5,\ x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,$

$x_A+x_B \geq 2,\ x_A+x_C \geq 5,\ x_B+x_C \geq 0\ \}$

$\downarrow$

$x_A + x_C = 5\ (x_B = 0),\ \ x_A \geq 2$

$x_B = 0$ → Ａと Ｃ の間で売買

$x_A \geq 2\ \ (x_C \leq 3)$ → １２００万円以上の価格で売買

ベームバベルク の馬の市場（コア）

プレイヤー1，2（売り手），　3，4（買い手）

1は10万円，2は12万円，3は15万円，4は20万円と評価

特性関数形ゲーム：

$v(\{1,2,3,4\}) = \max(5+8, 10+3) = 13$

$v(\{1,2,3\}) = 5$, $v(\{1,2,4\}) = 10$, $v(\{1,3,4\}) = 10$, $v(\{2,3,4\}) = 8$

$v(\{1,3\}) = 5$, $v(\{1,4\}) = 10$, $v(\{2,3\}) = 3$, $v(\{2,4\}) = 8$

それ以外のSについては　$v(S) = 0$

ベームバベルク の馬の市場（コア）

$v(\{1,2,3,4\}) = \max(5+8, 10+3) = 13$

$v(\{1,2,3\}) = 5$, $v(\{1,2,4\}) = 10$, $v(\{1,3,4\}) = 10$, $v(\{2,3,4\}) = 8$

$v(\{1,3\}) = 5$, $v(\{1,4\}) = 10$, $v(\{2,3\}) = 3$, $v(\{2,4\}) = 8$

それ以外のSについては　$v(S) = 0$

コア：　$x \in C \rightarrow x_1+x_3=5,\ x_2+x_4=8,\ x_1+x_4=10,\ x_2+x_3=3$

$x_1 = p-10$, $x_2 = p-12$, $x_3 = 15-p$, $x_4 = 20-p$ とすると

$20-p \le 8 \rightarrow p \ge 12,\ 15-p \le 3 \rightarrow p \ge 12,$

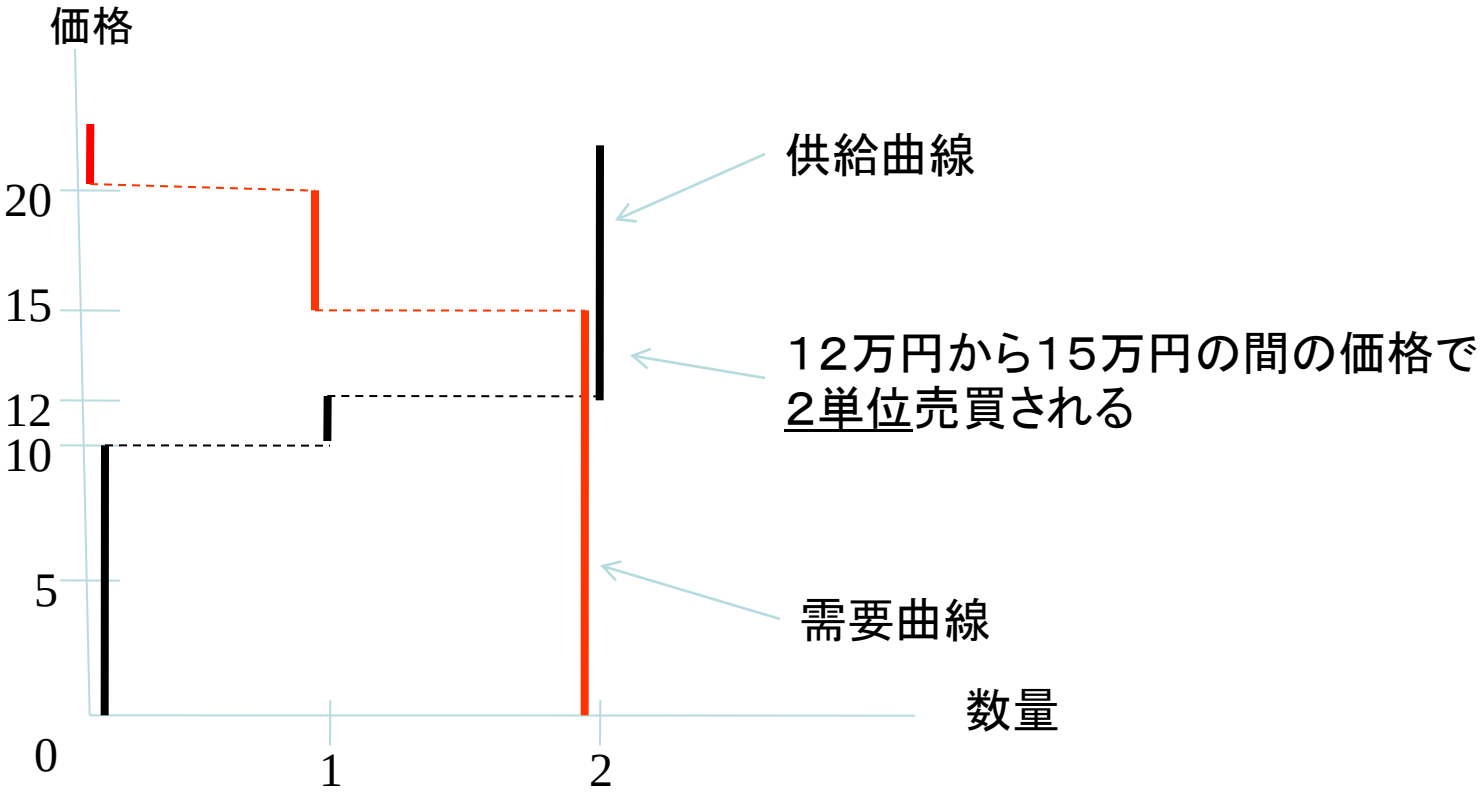
$p-12 \le 3 \rightarrow p \le 15,\ p-10 \le 5 \rightarrow p \le 15 \rightarrow\ 12 \le p \le 15$

価格 p $(12 \le p \le 15)$ で，1，2は売り，3，4は買う

ベームバベルクの馬市場（需要曲線と供給曲線）

プレイヤー1，2（売り手），　3，4（買い手）

1は10万円，2は12万円，3は15万円，4は20万円と評価



ベームバベルク の馬の市場（コア）

プレイヤー1，2（売り手），　3，4（買い手）

1は10万円，2は15万円，3は12万円，4は20万円と評価

特性関数形ゲーム：

$v(\{1,2,3,4\}) = \max(2+5, 10+0) = 10$

$v(\{1,2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,4\}) = 10$, $v(\{1,3,4\}) = 10$, $v(\{2,3,4\}) = 5$

$v(\{1,3\}) = 2$, $v(\{1,4\}) = 10$, $v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{2,4\}) = 5$

それ以外のSについては　$v(S) = 0$

ベームバベルク の馬の市場（コア）

$v(\{1,2,3,4\}) = \max(2+5, 10+0) = 10$

$v(\{1,2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,4\}) = 10$, $v(\{1,3,4\}) = 10$, $v(\{2,3,4\}) = 5$

$v(\{1,3\}) = 2$, $v(\{1,4\}) = 10$, $v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{2,4\}) = 5$

それ以外のSについては　$v(S) = 0$

コア：　$x \in C \rightarrow x_1+x_4=10,\ x_2=x_3=0,\ x_1 \geq 2,\ x_4 \geq 5$

$x_1 = p-10$, $x_4 = 20-p$ とすると

$$p-10 \geq 2 \rightarrow p \geq 15, \quad 20-p \geq 5 \rightarrow p \leq 15,$$

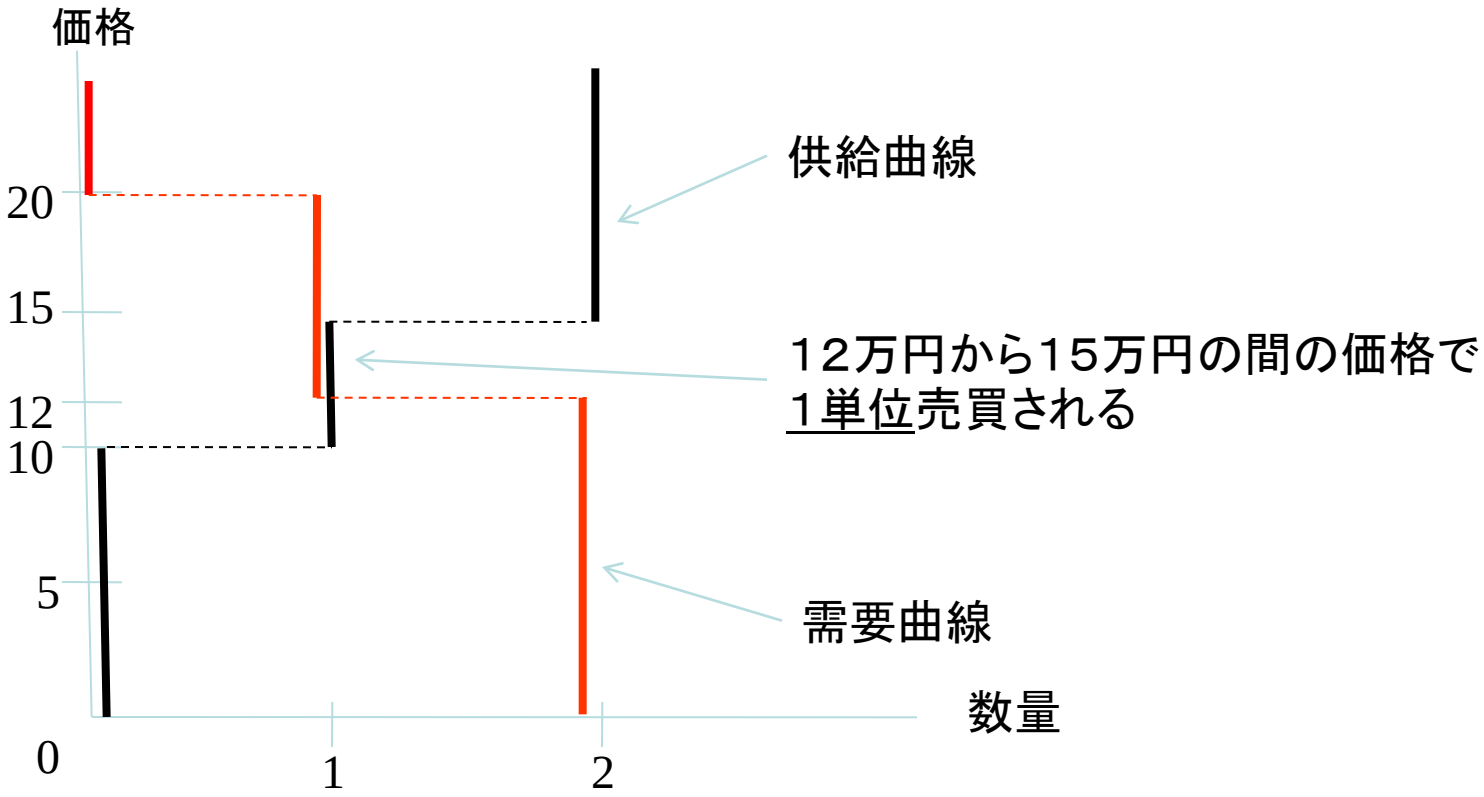
$$\rightarrow \quad 12 \leq p \leq 15$$

価格 p $(12 \leq p \leq 15)$ で，1が売り，4が買う

ベームバベルクの馬市場（需要曲線と供給曲線）

プレイヤー1，2（売り手），　3，4（買い手）

1は10万円，2は15万円，3は12万円，4は20万円と評価



一般の場合　→　エコノミックゲームセオリー　pp. 10-13

一般の交換市場

$N = \{1,2,\ldots,n\}$ ： 取引主体（プレイヤー）

m 種類の財

<u>競争均衡</u>

（1） 予算制約の下で効用最大にするような財ベクトル

（2） 需要と供給の一致

を満たすような価格ベクトルと財ベクトルの組

競争均衡配分 $\subseteq$ コア

レプリカ市場 $\rightarrow \infty$ $\Longrightarrow$ 競争均衡配分 $\rightarrow$ コア

「エコノミックゲームセオリー」 第8章

破産問題

タルムード（ユダヤ教の聖典）

ある人が、100万円の遺産を残してなくなった

A, B, C の3人に
100万円，200万円，300万円の負債

100万円の遺産 → どう分ける ？

「3等分しなさい！」

タルムードの分配

	A	B	C	
負債額	100万	200万	300万	
遺産額				
100万	100/3万	100/3万	100/3万	（3等分）
200万	50万	75万	75万	（？？？）
300万	50万	100万	150万	（比例配分）

Aumann と Maschler のアプローチ

- ミシュナ
  （バビロニア・タルムードの法律部分）

- 協力ゲーム理論
  特性関数形ゲーム
  解の1つである「仁（nucleolus）」

ミシュナの分配（布争いの原理）

A　　B

全部 ⇦ 布 ⇨ 半分

ミシュナは

３／４　　１／４　　？？？

全部ほしい　→　Bには何も与えない

１／2を与えてよい　←　半分ほしい

残りの１／2を半分（１／４）ずつに

１／２＋１／４＝３／４　　０＋１／４＝１／４

整合解　（3人の場合，4人以上も同様）

遺産　$E\ (>0)$　　負債　$d_A,\ d_B,\ d_C\ (>0)$

$$E < d_A + d_B + d_C$$

分配案　(x_A, x_B, x_C)　：$x_A + x_B + x_C = E$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

(x_A, x_B, x_C) が整合的

→　A, B について、

$x_A + x_B$ をミシュナの方法で 分けたら，x_A と x_B になる

A は，$\max(0,\ x_A + x_B - d_A)$ を B へ

B は，$\max(0,\ x_A + x_B - d_B)$ を Aへ　残りは等しく分ける

A, C　　B, C　　についても同様

タルムードの解の整合性

	A (100)	B (200)	C(300)
100	100/3	100/3	100/3
200	50	75	75
300	50	100	150

	A		B
200/3	100	→	0
	0	←	200
	0＋ 100/3		0＋ 100/3

	B		C
250	200	→	50
	0	←	300
	0＋(250－50)/2		50＋ (250－50)/2

協力ゲームによるアプローチ
（３人の場合，４人以上も同様）

遺産　E (>0)　　負債　d_A, d_B, d_C (>0)

$$E < d_A + d_B + d_C$$

特性関数形ゲーム　（N, v）

プレイヤーの集合　N={A, B, C}

特性関数　v : N の部分集合の全体の上の実数値関数

v(S) : 提携 S が彼らだけで獲得できる値

$v(A) = \max(0, E - (d_B + d_C))$,　　v(B), v(C) も同様

$v(AB) = \max(0, E - d_C)$,　　v(AC), v(BC)も同様

$$v(ABC)=E$$

タルムードの例

	A (100)	B (200)	C(300)
100	100/3	100/3	100/3
200	50	75	75
300	50	100	150

$v(A) = \max(0, 100 - (200 + 300)) = 0, \quad v(B) = v(C) = 0$

$v(AB) = v(AC) = v(BC) = 0, \quad v(ABC) = 100$

$v(A) = \max(0, 300 - (200 + 300)) = 0, \quad v(B) = v(C) = 0$

$v(AB) = 0,$

$v(AC) = 300 - 200 = 100, \quad v(BC) = 300 - 100 = 200$

$v(ABC) = 300$

ミシュナの分配（布争いの原理）と仁

	A	B		ミシュナ	A	B
布を	全部	半分	欲しい	→	３／４	１／４

特性関数　　$v(AB)=1,\quad v(A)=1/2,\quad v(B)=0$

配分案　　$x = (x_A, x_B),\quad x_A+x_B = 1,\quad x_A, x_B \geq 0$

不満　　$e(A , x) = 1/2 - x_A,\quad e(B , x) = - x_B$

$e(A , x) = 1/2 - x_A \leq M,$

$e(B , x) = - x_B \;=\; -1 + x_A \leq M \quad \rightarrow \quad \min\ M$

$$-M + 1/2 \leq x_A \leq M + 1$$

Mの最小値は　$-1/4$　　→　　$x_A = 3/4,\ x_B = 1/4$

タルムードの分配と仁（100万）（1）

	A (100)	B (200)	C(300)
100	100/3	100/3	100/3

$$v(ABC) = 100, \quad v(AB) = v(AC) = v(BC) = 0$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

分配案 $x = (x_A, x_B, x_C), \quad x_A + x_B + x_C = 100, \quad x_A, x_B, x_C \geq 0$

不満

$$e(AB, x) = -x_A - x_B = -100 + x_C$$

$$e(AC, x) = -x_A - x_C = -100 + x_B$$

$$e(BC, x) = -x_B - x_C = -100 + x_A$$

$$e(A, x) = -x_A, \quad e(B, x) = -x_B, \quad e(C, x) = -x_C$$

タルムードの分配と仁（１００万）（２）

不満　$e(AB, x) = -100 + x_C$,　$e(AC, x) = -100 + x_B$,

$e(BC, x) = -100 + x_A$,

$e(A, x) = -x_A$,　$e(B, x) = -x_B$,　$e(C, x) = -x_C$

$$-100 + x_C \le M,\quad -100 + x_B \le M,\quad -100 + x_A \le M \quad \rightarrow \quad \min\ M$$

$$-x_A \le M,\quad -x_B \le M,\quad -x_C \le M$$

$$-M \le x_A \le M + 100,\quad -M \le x_B \le M + 100,\quad -M \le x_C \le M + 100$$

$$-3M \le x_A + x_B + x_C = 100 \le 3M + 300$$

$\rightarrow$　$-100/3 \le M$　M の最小値は $-100/3$

仁は　(100/3,　100/3,　100/3)

タルムードの分配と仁（200万）（1）

	A (100)	B (200)	C(300)
200	50	75	75

$$v(ABC) = 200, \quad v(AB) = v(AC) = 0, \quad v(BC) = 100$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

分配案 $x=(x_A, x_B, x_C), \quad x_A + x_B + x_C = 200, \quad x_A, x_B, x_C \geq 0$

不満 $e(AB, x) = -x_A - x_B = -200 + x_C$

$e(AC, x) = -x_A - x_C = -200 + x_B$

$e(BC, x) = 100 - x_B - x_C = -100 + x_A$

$e(A, x) = -x_A, \quad e(B, x) = -x_B, \quad e(C, x) = -x_C$

タルムードの分配と仁（200万円）（2）

不満 $e(ABC, x) = 200 - (x_A + x_B + x_C) = 0$

$e(AB, x) = -200 + x_C$, $e(AC, x) = -200 + x_B$

$e(BC, x) = -100 + x_A$

$e(A, x) = -x_A$, $e(B, x) = -x_B$, $e(C, x) = -x_C$

$-200 + x_C \le M$, $-200 + x_B \le M$, $-100 + x_A \le M$ $\rightarrow$ min M

$-x_A \le M$, $-x_B \le M$, $-x_C \le M$

$-M \le x_A \le M + 100$, $-M \le x_B \le M + 200$, $-M \le x_C \le M + 200$

$-3M \le x_A + x_B + x_C = 200 \le 3M + 500$

$\rightarrow$ M の最小値は -50

$x_A = 50$, $x_B + x_C = 150$, $50 \le x_B \le 150$, $50 \le x_C \le 150$

タルムードの分配と仁（200万）（3）

$x_A = 50, \quad x_B + x_C = 150 \ (x_C = 150 - x_B),$

$50 \le x_B \le 150, \quad 50 \le x_C \le 150$

不満 $e(ABC, x) = 0$

$e(AB, x) = -200 + x_C = -50 - x_B, \quad e(AC, x) = -200 + x_B$

$e(BC, x) = -50$

$e(A, x) = -50, \quad e(B, x) = -x_B, \quad e(C, x) = -x_C = -150 + x_B$

$-50 - x_B \le M, \quad -200 + x_B \le M \qquad \rightarrow \qquad \min\ M$

$-x_B \le M, \quad -150 + x_B \le M$

$-M \le x_B \le M + 150 \qquad \rightarrow$ M の最小値は -75

$x_B = 75, \quad x_C = 75$

仁は（50, 75, 75）

タルムードの分配と仁（300万）（1）

	A (100)	B (200)	C(300)
300	50	100	150

$v(ABC) = 300,\quad v(AB) = 0,\quad v(AC) = 100,\quad v(BC) = 200$

$v(A) = v(B) = v(C) = 0$

分配案 $x=(x_A, x_B, x_C),\quad x_A + x_B + x_C = 300,\quad x_A, x_B, x_C \geq 0$

不満 $e(AB, x) = -x_A - x_B = -300 + x_C$

$e(AC, x) = 100 - x_A - x_C = -200 + x_B$

$e(BC, x) = 200 - x_B - x_C = -100 + x_A$

$e(A, x) = -x_A,\quad e(B, x) = -x_B,\quad e(C, x) = -x_C$

タルムードの分配と仁（300万）（2）

不満 $e(ABC, x) = 300 - (x_A + x_B + x_C) = 0$

$e(AB, x) = -300 + x_C$, $e(AC, x) = -200 + x_B$

$e(BC, x) = -100 + x_A$

$e(A, x) = -x_A$, $e(B, x) = -x_B$, $e(C, x) = -x_C$

$-300 + x_C \leq M$, $-200 + x_B \leq M$, $-100 + x_A \leq M$ $\rightarrow$ min M

$-x_A \leq M$, $-x_B \leq M$, $-x_C \leq M$

$-M \leq x_A \leq M + 100$, $-M \leq x_B \leq M + 200$, $-M \leq x_C \leq M + 300$

$-3M \leq x_A + x_B + x_C = 300 \leq 3M + 500$

$\rightarrow$ M の最小値は -50

$x_A = 50$, $x_B + x_C = 250$, $50 \leq x_B \leq 150$, $50 \leq x_C \leq 250$

タルムードの分配と仁（300万）（3）

$x_A = 50, \quad x_B + x_C = 250 \ (x_C = 250 - x_B),$

$50 \le x_B \le 150, \quad 50 \le x_C \le 250$

不満 $e(ABC, x) = 0$

$e(AB, x) = -300 + x_C = -50 - x_B, \quad e(AC, x) = -200 + x_B$

$e(BC, x) = -50$

$e(A, x) = -50, \quad e(B, x) = -x_B, \quad e(C, x) = -x_C = -250 + x_B$

$-50 - x_B \le M, \quad -200 + x_B \le M \qquad \rightarrow \qquad \min\ M$

$-x_B \le M, \quad -250 + x_B \le M$

$-M \le x_B \le M + 200 \qquad \rightarrow$ M の最小値は -100

$x_B = 100, \ x_C = 150$

仁は（50, 100, 150）

まとめ

タルムード

	A (100)	B (200)	C(300)
100	100/3	100/3	100/3
200	50	75	75
300	50	100	150

ミシュナ（布争いの原理）

A（1枚）	B（半分）
3/4	1/4

特性関数形ゲームによる表現

仁（nucleolus）

課題

次回レポートとして提出

I　売り手1，2，3，買い手4，5，6からなる以下のベームバベルクの市場について，

（1）需要曲線と供給曲線を描き，取引価格と取引単位を求めよ。

（2）特性関数形ゲームとして定式化し，コアを求め，取引価格の範囲を求めよ。

1，2，3の評価がそれぞれ10万円，15万円，20万円，4，5，6の評価がそれぞれ25万円，30万円，35万円

1，2，3の評価がそれぞれ10万円，15万円，25万円，4，5，6の評価がそれぞれ20万円，30万円，35万円

1，2，3の評価がそれぞれ10万円，25万円，30万円，4，5，6の評価がそれぞれ15万円，20万円，35万円

II　以下の状況を特性関数形ゲームとして定式化し，その仁を求めよ．さらに，仁によって与えられた分配が，整合解となっているかどうかを調べよ。

遺産額が250万円であり，A，B，Cの3人に100万円，200万円，300万円の負債がある

遺産額が400万円であり，A，B，Cの3人に100万円，200万円，300万円の負債がある