練習問題４

1. 次の３人ゲームのシャープレイ値を求めよ．
   $v(\{1,2,3\}) = 100$,
   $v(\{1,2\}) = 70$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 50$,
   $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

2. 同じ方向に家のあるＡ，Ｂ，Ｃの３人が大岡山駅からタクシーに相乗りし，一番遠くに家のあるＣが料金を支払っておき，翌日清算することにした．メーターでは，Ａの家までは１２００円，Ｂの家までは２０００円であり，最終的にＣの家までは，２５００円かかった．この状況を費用軽減額に基づいて特性関数形表現し，シャープレイ値を求めよ。シャープレイ値に基づけば，Ａ，Ｂはそれぞれいくらずつ Ｃに支払えばよいか。

3. 左手の手袋を持っているプレイヤー１，２と右手の手袋を持っているプレイヤー３，４がいる．左手の手袋と右手の手袋がそろえば，１組につき１万円で売れる．

   (a) この状況を特性関数形ゲームとして定式化せよ．

   (b) このゲームのシャープレイ値を求めよ．

   (c) いま，左手の手袋を持つプレイヤー５が加わったとき，シャープレイ値はどうなるかを答えよ．

4. 投票ゲームにおいては，プレイヤー i のシャープレイ値は

$$\phi_i = \sum_{S\cup\{i\}\in\mathbf{W}, S\notin\mathbf{W}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$$

   で与えられることを示せ．これを，投票ゲームにおけるシャープレイ・シュービック指数という．

5. ３人ゲームにおけるシャープレイ値の公理系からの導出

   - プレイヤーの集合を $N = \{1,2,3\}$ とする．７個の特性関数 $w_1, w_2, w_3, w_{12}, w_{13}, w_{23}, w_{123}$ を以下のように作る．

$$w_1(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_2(S) = \begin{cases} 1 & S = \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_3(S) = \begin{cases} 1 & S = \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{12}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,2\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{13}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{23}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$w_{123}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1,2,3\} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

- （問題）この７つの特性関数をもつゲームそれぞれについて，そのシャープレイ値を４つの公理のいくつかを用いて求めよ．
- 任意の特性関数 v をとると，v は上の７個の特性関数の和（一次結合）で表される．. まず，提携 $\{1\}$ について０でない値を与えているのは w_1 のみであることから，w_1 の係数は $v(\{1\})$ である．同様にして，w_2, w_3 の係数は，それぞれ $v(\{2\}), v(\{3\})$ である．次に，提携 $\{1,2\}$ について０でない値を与えているのは w_1, w_2, w_{12} で，w_1, w_2 の係数は，それぞれ $v(\{1\}), v(\{2\})$ であることから，w_{12} の係数は，$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$ である．
  （問題）w_{13}, w_{23}, w_{123} の係数を求めよ．
- （問題）以上のことと公理のいくつかを用いて，以下の特性関数を持つゲームのシャープレイ値を求め，公式を用いて求めた値と一致することを確かめよ。
  (a) $v(\{1,2,3\}) = 2,\ v(\{1,2\}) = 1,\ v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
  (b) $v(\{1,2,3\}) = 3,\ v(\{1,2\}) = 2,\ v(\{1,3\}) = 2,\ v(\{2,3\}) = 1,\ v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
  (c) $v(\{1,2,3\}) = 6,\ v(\{1,2\}) = 4,\ v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = 2,\ v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = 2,\ v(\{3\}) = 0$
  (d) 問題１および問題２のゲーム