練習問題２

1. 次の３人ゲームのコアを図を用いて求めよ．
   $v(\{1,2,3\}) = 100$,
   $v(\{1,2\}) = 70$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 50$,
   $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

2. 同じ方向に家のあるA，B，Cの３人が大岡山駅からタクシーに相乗りし，一番遠くに家のあるCが料金を支払っておき，翌日清算することにした．メーターでは，Aの家までは１２００円，Bの家までは２０００円であり，最終的にCの家までは，２５００円かかった．この状況を特性関数形ゲームとして記述し，コアを求めよ．

3. 左手の手袋を持っているプレイヤー１，２と右手の手袋を持っているプレイヤー３，４がいる．左手の手袋と右手の手袋がそろえば，１組につき１万円で売れる．
   (a) この状況を特性関数形ゲームとして定式化せよ．
   (b) このゲームのコアを求めよ．
   (c) いま，左手の手袋を持つプレイヤー５が加わったとき，特性関数形ゲームはどう変化し，コアはどうなるかを答えよ．
   (d) 左手の手袋を持っているプレイヤーが m 人，右手の手袋を持っているプレイヤーが n 人のときのコアを求めよ。

4. ３人ゲームにおけるコアの存在条件

   - $x = (x_1, x_2, x_3) \in C \Longleftrightarrow$
     $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= v(\{1,2,3\}) \\ x_1 + x_2 &\geq v(\{1,2\}) \\ x_1 + x_3 &\geq v(\{1,3\}) \\ x_2 + x_3 &\geq v(\{2,3\}) \\ x_1 &\geq v(\{1\}) \\ x_2 &\geq v(\{2\}) \\ x_3 &\geq v(\{3\}) \end{aligned}$$

   - $C \neq \emptyset \Longleftrightarrow$
     最小化線形計画問題
     $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\longrightarrow min \\ &\text{subject to} \\ x_1 + x_2 &\geq v(\{1,2\}) \\ x_1 + x_3 &\geq v(\{1,3\}) \\ x_2 + x_3 &\geq v(\{2,3\}) \\ x_1 &\geq v(\{1\}) \end{aligned}$$

$x_2 \geq v(\{2\})$
$x_3 \geq v(\{3\})$
において最小値 $\leq v(\{1,2,3\})$

- 双対問題
  双対変数を $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とする。
  $$\gamma_{12}v(\{1,2\})+\gamma_{13}v(\{1,3\})+\gamma_{23}v(\{2,3\})+\gamma_1 v(\{1\})+\gamma_2 v(\{2\})+\gamma_3 v(\{3\}) \longrightarrow max$$
  $$\gamma_{12}+\gamma_{13}+\gamma_1 = 1$$
  $$\gamma_{12}+\gamma_{23}+\gamma_2 = 1$$
  $$\gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_3 = 1$$
  $$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_1, \gamma_2 . \gamma_3 \geq 0$$
  を考えると両問題ともに実行可能ゆえ，双対定理から主問題の最小値と双対問題の最大値は等しい。したがって，双対問題の最大値 $\leq v(\{1,2,3\})$ であることがコアが非空であるための必要十分条件となる。
- （問題）以上のことを用いて，$v(\{i\}) = 0\ \forall i \in \{1,2,3\}$ となる優加法的な３人ゲームにおいて，非空なコアが存在するための必要十分条件が，$v(\{1,2\})+v(\{1,3\})+v(\{2,3\}) \leq 2v(\{1,2,3\})$ となることを示せ.

5. コアの存在条件

- コア　$C = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A | \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subset N,\ S \neq N, \emptyset\}$
  ただし，$A = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n | \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ x_i \geq v(\{i\})\ \forall i \in N\}$
- 線形計画問題
  $\sum_{i \in N} x_i \ \rightarrow$ 最小化
  制約条件　$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N\ S \neq N, \emptyset$
- $C \neq \emptyset \iff$ 線形計画問題の最小値 $\leq v(N)$
- 双対問題
  $\sum_{S \subset N, S \neq N, \emptyset} \gamma_S v(S) \ \rightarrow$ 最大化
  制約条件　$\sum_{S: i \in S \subset N, S \neq N, \emptyset} \gamma_S = 1\ \forall i \in N$
  $\gamma_S \geq 0\ \forall S \subset N, S \neq N, \emptyset$
- $C \neq \emptyset \iff$ 双対計画問題の最大値 $\leq v(N)$
- 提携の集合族 $\{S_1, ..., S_m\}$ が平衡集合族　$\Leftrightarrow$
  ある正の実数 $\gamma_1, ..., \gamma_m$ が存在して，$\sum_{j: i \in S_j} \gamma_j S_j = 1\ \forall i \in N$
  $\gamma_1, ..., \gamma_m$：重み
- ゲーム (N, v) が平衡ゲーム $\iff$
  N の任意の平衡集合族 $\{S_1, ..., S_m\}$ とその任意の重み $\gamma_1, ..., \gamma_m$ に対して，
  $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j v(S_j) \leq v(N)$
- $C \neq \emptyset \iff$ ゲーム (N, v) が平衡ゲーム

6. 特性関数が２つの値 0,1 だけをとり，$v(N) = 1$ となる特性関数形ゲーム (N, v) を単純ゲームという．単純ゲームのうち,（１）$S \subseteq T$ ならば，$v(S) \leq v(T)$,（２）$v(S) = 1$ ならば，$v(N \setminus S) = 0$，の２つの性質を満たすものを投票ゲームという．$v(S) = 1$ となる提携を勝利提携といい，その全体を $\mathbf{W}$ で表す．すべての勝利提携に含まれるプレイヤーが存在するとき，このプレイヤーを拒否権を持つプレイヤーという．投票ゲームにおいて，コアが非空であるための必要十分条件は拒否権を持つプレイヤーが存在することであることを示せ．さらに，拒否権を持つプレイヤーの集合を V とするとき，コアは

$$C = \{x \in A | x_i = 0 \ \ \forall i \in N \setminus V\}$$

で与えられることを示せ.

7. コア C と支配に基づくコア DC の関係について

- （問題）$C \subseteq DC$ であることを示せ.
- (N, v) が優加法的であれば，$DC \subseteq C$ となることの証明
  任意の配分 $x \in DC$ をとり，$x \notin C$ と仮定する．C の定義より，$\sum_{i \in S} x_i < v(S)$ となる提携 $S \subset N$ が存在する．$\epsilon = v(S) - \sum_{i \in S} x_i > 0$ とし，

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\epsilon}{|S|} & i \in S \\ v(\{i\}) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\})}{|N \setminus S|} & i \in N \setminus S \end{cases}$$

  によって，n 次元ベクトル $y = (y_1, \ldots, y_n)$ を定義する．ただし，$|S|, |N \setminus S|$ は，それぞれ $S, N \setminus S$ に属するプレイヤーの数である.
  （問題）y が全体合理性を満たすことを示せ.
  （問題）(N, v) が優加法的であれば，y は個人合理性を満たすことを示せ.
  したがって，(N, v) が優加法的であれば，y は配分である.
  （問題）y は x を S を通して支配することを示せ.
  よって，$x \in DC$ に矛盾する.（証明終）