分配問題

いくつかの非分割財を需要者に分配する

第1章　→　金銭の授受あり
家の売買
・・・

本章　→　金銭の授受がふさわしくない場合
昇進（ポストの割り当て）
機器（PCなど），秘書などの割り当て
議員数の選挙区への配分
学部長選挙
臓器移植
・・・・・

2つのアプローチ

ポイント制による順位づけ

いくつかの要素ごとにポイントを与え，ポイントを集計して順位づけ。順序の高いものから分配する

投票による順位づけ

各投票者の順位づけを集計し，社会（集団）としての順序づけを与える

臓器移植とポイント制

アメリカにおけるシステム

例

		臓 器 希 望 者			
	A	B	C	D	E
抗原適合度	4	4	0	6	12
輸送手段	0	0	6	0	0
緊急度	0	0	0	0	0
抗体人口比	1	2	0	5.5	9
待ち時間	10	8	6	4	2
計	15	14	12	15.5	23

抗原適合度： 6項目あり，1項目につき2ポイント
輸送手段： 最大6ポイント
緊急度： 最大10ポイント
抗体人口比： 拒絶反応を起こす抗体を持つ人口の割合10%につき1ポイント
待ち時間： $10(n-k+1)/n$ n：希望者数， k：自分の順番
（上の例では： A,B,C,D,Eの順）

ポイント制のパラドックス

		臓 器 希 望 者			
	A	B	C	D	E
抗原適合度	4	4	0	6	12
輸送手段	0	0	6	0	0
緊急度	0	0	0	0	0
抗体人口比	1	2	0	5.5	9
待ち時間	10	8	6	4	2
	10	7.5	5	2.5	
計	15	14	12	15.5	23
	15	13.5	11	14	

移植に適合する腎臓が2つ → 同時であれば E と D

時間をおいて2つが現れば → 最初は E, 2つ目は？

E が抜けた後の待ち時間は

→ A: 10(4-1+1)/4=10, B: 10(4-2+1)/4=7.5

C: 10(4-3+1)/4=5, D: 10(4-4+1)/4=2.5

2つ目は A

改訂 →71ページ

パラドックスは起こりにくくなったが，完全に排除されてはいない

分配問題

分配問題

(τ^n, a^n),　$\tau^n = (t_1, \dots, t_n)$,　$t_i = (t_{i1},\dots,t_{im})$,　$t_{i1},\dots, t_{im} \in \Re$,　$i=1,\dots,n$

各主体 t_i は，m種類の要素（実数）で表現される

評価ベクトルと呼ぶ　　全体を T^n

$a^n \in \Re$,　$a^n = 0, 1, \dots, n$

非分割財の個数，　各主体に最大でも1個ずつ分配

全体を $\mathfrak{I}^n$

		主体（臓器希望者）		
		t_1	……	t_n
評価項目	1	t_{11}	……	t_{n1}
	…			
	m	t_{1m}	……	t_{nm}

提供臓器数　$a^n \in \{0, 1, \cdots, n\}$

分配問題

(τ^n, a^n)に対する分配　$a=(a_1, \dots, a_n)$

$a_1 + \dots + a_n = a^n$,　$a_1, \dots, a_n$ は 0 または 1　$\Longrightarrow$　全体を A^n

主体（臓器希望者）

評価項目	t_1	……	t_n
1	t_{11}	……	t_{n1}
…			
m	t_{1m}	……	t_{nm}

評価ベクトル

提供臓器数　$a^n \in \{0, 1, \cdots, n\}$

分配　$a=(a_1, \dots, a_n)$

<u>分配問題の解</u>　各 n について,

$$F : \mathfrak{I}^n \to A^n$$

$$(\tau^n, a^n) \to F(\tau^n, a^n) \in A^n$$

分配問題の解

優先ルール

分配問題 (τ^n, a^n), $\tau^n = (t_1, \ldots, t_n)$, に対して,

$t_1, \ldots, t_n$ に<u>優先順序</u>があれば, 高い順に非分割財を与えればよい

優先順序（主体の評価ベクトルの全体 T^n の上の弱順序 $\geq$）

完備性: 任意の2つの評価ベクトル t, t' について, $t \geq t'$ または $t' \geq t$

推移性: 任意の3つの評価ベクトルt, t', t'' について,

$$t \geq t', t' \geq t'' \rightarrow t \geq t''$$

→ すべての評価ベクトルを一列に順序づけられる

<u>問題</u> : 分配問題の解 F がどのような性質を満たせば,
タイプの上に優先順序を導けるか？

優先順序を導く解の性質

<u>不偏性</u>: 分配問題 (τ^n, a^n), $\tau^n = (t_1, \ldots, t_n)$ において,

任意の i, j に対して,

i の評価ベクトルが t, j の評価ベクトルが t' のときの解を $F((\ldots, t, \ldots, t', \ldots), a_0^n)$

i の評価ベクトルが t', j の評価ベクトルが t のときの解を $F((\ldots, t', \ldots, t, \ldots), a_0^n)$

とするとき,

$$(\ldots a, \ldots, a', \ldots) = F((\ldots, t, \ldots, t', \ldots), a_0^n)$$

$$\leftrightarrow \qquad (\ldots a', \ldots, a, \ldots) = F((\ldots, t', \ldots, t, \ldots), a_0^n)$$

（→ 分配はタイプのみに依存（名前などには依存しない））

<u>整合性</u>: 分配 $a = (a_1, \ldots, a_n) = F(\tau^n = (t_1, \ldots, t_n), a^n)$ であれば,

任意の i, j について, 分配問題 $((t_i, t_j), a_i + a_j)$ を考えた時に以下が成り立つ

$$(a_i, a_j) = F((t_i, t_j), a_i + a_j)$$

（破産問題の整合性と同じ）

不偏性，整合性と優先順序

T^n の上に優先順序があるとすると，

任意の分配問題 $((t_1, \ldots, t_n), a^n)$ において，$t_1, \ldots, t_n$ の優先順序が与えられる

$F((t_1, \ldots, t_n), a^n)$ は，

優先順序に従ってa^n番目までの評価ベクトルの集合を与えればよい

→ 不偏性と整合性を満たす

不偏性と整合性を満たす解 F があるとすると，

任意の2つの評価ベクトル t, t' に対して，

$t \geq t' \leftrightarrow (1, 0) = F((t, t'), 1)$

によって，順序 ≥ を定義すると，≥ は弱順序となる

不偏性と整合性を満たす解 F ↔ タイプの上の優先順序

ポイント制と優先順序

ポイント制： 整合性を満たさないことがある（臓器移植の例－数値変更）

		臓 器 希 望 者			
	A	B	C	D	E
抗原適合度	4	4	0	6	12
輸送手段	0	0	6	0	0
緊急度	0	0	0	0	0
抗体人口比	1	2	0	5	9
待ち時間	10	8	6	2	4
	10	--	--	5	
計	15 → 15	14	12	13 →16	25

$10(n-k+1)/n$
n：希望者数，
k：自分の順番

((A,B,C,D,E),2) → (1,0,0,0,1) = F((A,B,C,D,E),2)

((A,D),1) → (0,1) = F((A,D),1) 整合的でない

2つのアプローチ

ポイント制による順位づけ

いくつかの要素ごとにポイントを与え，ポイントを集計して順位づけ。順序の高いものから分配する

投票による順位づけ

各投票者の順位づけを集計し，社会（集団）としての順序づけを与える

ボルダルール

	A	B	C
効力性	10	5	20
緊急性	2	1	5
待ち時間	1.5	0.5	3

委員会の委員の順序づけ

人数	13人	10人	6人	13人	18人
第1順位	A	A	B	B	C
第2順位	C	B	A	C	B
第3順位	B	C	C	A	A

合意形成は？

ボルダルール

人数	13人	10人	6人	13人	18人
第1順位	A	A	B	B	C
第2順位	C	B	A	C	B
第3順位	B	C	C	A	A

ボルダルール： 順位の高いものから 2点，1点，0点をつける

A : 2x13 + 2x10 + 1x6 + 0x13 + 0x18 = 52

B : 0x13 + 1x10 + 2x6 + 2x13 + 1x18 = 66

C : 1x13 + 0x10 + 0x6 + 1x13 + 2x18 = 62

→ B > C > A

ボルダスコア

ボルダスコアの別計算法

人数	13人	10人	6人	13人	18人
第1順位	A	A	B	B	C
第2順位	C	B	A	C	B
第3順位	B	C	C	A	A

A : 52
B : 66
C : 62

v_{ij} : タイプ t_j よりもタイプ t_i を高い順位に付けた人数

$v_{AB} = 13 + 10 = 23$

	A	B	C	合計
A	0	$v_{AB} = 23$	$v_{AC} = 29$	52
B	$v_{BA} = 37$	0	$v_{BC} = 29$	66
C	$v_{CA} = 31$	$v_{CB} = 31$	0	62

合計はボルダスコアと等しい

<u>投票行列</u>

A > B, C　a 人　→　A のボルダスコア = 2a + b + c

B > A > C　b 人　　$v_{AB} + v_{AC} = a + c + a + b = 2a + b + c$

C > A > B　c 人

コンドルセ順序

人数	13人	10人	6人	13人	18人
第1順位	A	A	B	B	C
第2順位	C	B	A	C	B
第3順位	B	C	C	A	A

A : 52

B : 66 → B > C > A

C : 62

B-C : 多数決であれば, 10 + 6 + 13 = 29 < 13 + 18 = 31 → C > B

A-C : 多数決であれば, 13 + 10 + 6 = 29 < 13 + 18 = 31 → C > A

C が選ばれるべき ー コンドルセの主張

C は<u>過半数選択肢（コンドルセ勝利者）</u>

<u>コンドルセスコア</u>

B > C > A : B > C → 10+6+13=29, B > A → 6+13+18= 37,

C > A → 13+18=31 → 29+37+31=97

C > B> A : 99 他の順序は ？

<u>コンドルセ順序</u>: コンドルセスコアが最大となる順序

過半数選択肢があれば必ず第1順位になる

コンドルセ順序と過半数選択肢

<u>コンドルセ順序</u>:　コンドルセスコアが最大となる順序

過半数選択肢があれば必ず第1順位になる

例:　5つの選択肢　A, B, C, D, E があり，A が過半数選択肢であるとする。

vij ：i を j よりも好む人の数

B > C > D > A > E

$$\cancel{v_{BC}} + \cancel{v_{BD}} + v_{BA} + \cancel{v_{BE}} + \cancel{v_{CD}} + v_{CA} + \cancel{v_{CE}} + v_{DA} + \cancel{v_{DE}} + \cancel{v_{AE}}$$

A > B > C > D > E

$$v_{AB} + v_{AC} + v_{AD} + \cancel{v_{AE}} + \cancel{v_{BC}} + \cancel{v_{BD}} + \cancel{v_{BE}} + \cancel{v_{CD}} + \cancel{v_{CE}} + \cancel{v_{DE}}$$

A は過半数選択肢ゆえ，

$$v_{AB} > v_{BA},\quad v_{AC} > v_{CA},\quad v_{AD} > v_{DA}$$

過半数選択肢がない場合（投票のパラドックス）

人数	6人	5人	2人
第1順位	A	B	C
第2順位	B	C	A
第3順位	C	A	B

B-C : $6 + 5 > 2$ → $B > C$

A-C : $6 < 5 + 2 = 7$ → $C > A$ → $A > B > C > A$ サイクルが生じる

A-B : $6+2 = 8 > 5$ → $A > B$

過半数選択肢は存在しない → <u>投票のパラドックス</u>

人数が1人ずつでも同様

アローの不可能性定理

人々の意見を集約して，社会的な順序をつくる方法のうち，
以下の3つの条件を満たすものはない

１　全員一致性：
　　すべての人がＡよりＢを高く順位づけていれば，
　　社会的順序もＡよりＢの方が高い
２　非独裁制：
　　ある1人の個人の順序づけが社会的順序づけと一致することはない
３　無関係な選択肢からの独立性：
　　選択肢ＡとＢの社会的順序は，各個人のＡとＢの順序づけ
　　のみに依存する

コンドルセの基準

コンドルセの基準は，以下の3つの条件を満たす

１　全員一致性：

すべての人がＡよりＢを高く順位づけていれば，

社会的順序もＡよりＢの方が高い

２　非独裁制：

ある1人の個人の順序づけが社会的順序づけと一致することはない

３‘　隣接した選択肢に関する無関係な選択肢からの独立性：

<u>社会的順序において選択肢ＡとＢの間に他の選択肢がないとき</u>，

この2つの選択肢の社会的順序は各個人のＡとＢの順序づけ

のみに依存する

次回までの課題

選択肢が a,b,c,d,eの5つあり，55人の投票者の選好が以下のように与えられている状況において以下の問いに答えよ。

人数	18	12	10	9	4	2
第1順位	a	b	c	d	e	e
第2順位	d	e	b	c	b	c
第3順位	e	d	e	e	d	d
第4順位	c	c	d	b	c	b
第5順位	b	a	a	a	a	a

(1) 各選択肢のボルダスコアを，第1順位に4点，第2順位に3点，第3順位に2点，第4順位に1点，第5順位に0点を与えることによって計算し，ボルダルールによって順位をつけよ。
(2) 投票行列を作り，ボルダスコアを計算せよ。
(3) 過半数選択肢は存在するか，存在する場合にはそれを求めよ。