ディジタル信号処理
(II)

学術国際情報センター
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

Web: *http://guchi.gsic.titech.ac.jp*

講義内容

1．連続時間信号とシステム
- 1．1　連続時間信号
  - 正弦波信号、指数信号、ステップ信号、矩形（方形）パルス信号
  - Diracのδ関数
  - 複素正弦波信号
- 1．2　線形システム
  - 線形システム、シフト不変システム、因果的システム
  - インパルス応答、たたみ込み積分

2．フーリエ変換
- 2．1　時間領域と周波数領域
  - フーリエ級数展開
  - フーリエ変換
  - 振幅、位相、パワースペクトル
- 2．2　フーリエ変換の性質
  - 線形性、シフト、スケーリング、対称性、複素共役、微分
  - たたみ込み、パーシバルの定理

1．連続時間信号とシステム

- 連続時間信号　$x(t)$
- 離散時間信号　$x(nt_0)$ または $x(n)$
- 信号処理システム

入力 x ⟶ **システム** ⟶ 出力 y

- 連続時間システム　$y(t) = S\{\, x(t) \,\}$
- 線形連続時間システム　$y(t) = \int x(\tau)h(\tau,t)d\tau$
- 線形シフト不変連続時間システム　$y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

1．1　連続時間信号

- 連続時間信号　$x(t)$
- 正弦波信号

  $x(t) = A\sin(\omega t + \theta)$

  A : 振幅

  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$: 角周波数

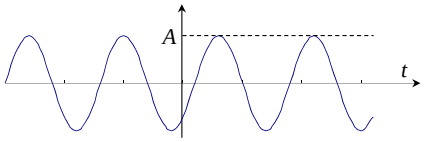
  f : 周波数

  T : 周期

  θ : 位相

  $\lambda = v / f$: 波長

  $k = 2\pi / \lambda = \omega / v$: 波数



- 周波数
  - 時間周波数　Hz ([cycle/sec, sec^{-1}])

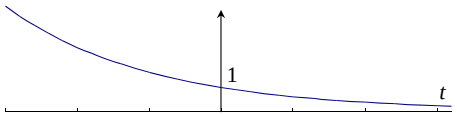
    周期 [sec]，　位相[rad]，　波長[m]，　波数[rad/m]，　角周波数[rad/sec]
  - 空間周波数　cycle / m

※　波長500nmの光（緑色光）の周波数はいくらか

時間信号の例

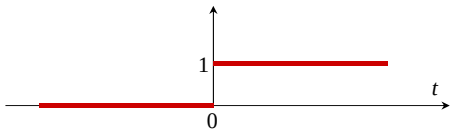
- **指数信号**

  $x(t) = e^{-at}$



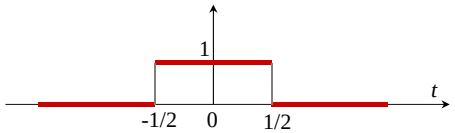
- **ステップ信号**

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



- **矩形（方形）パルス信号**

$$x(t) = p(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1/2 \\ 1 & |t| < 1/2 \end{cases}$$



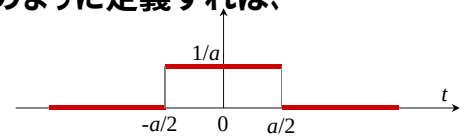
（厳密には、$t = 1/2$ のとき $p(t) = 0.5$）

単位インパルス信号

- **矩形パルス関数は** $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$

  幅 a の矩形パルス関数を以下のように定義すれば、

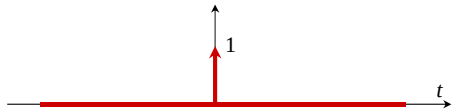
$$p_a(t) = \frac{1}{a} p(\frac{t}{a})$$



  上と同様、 $\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)dt = 1$

- **単位インパルス関数 ＝ Diracのデルタ関数** $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} p_a(t)$$ ※

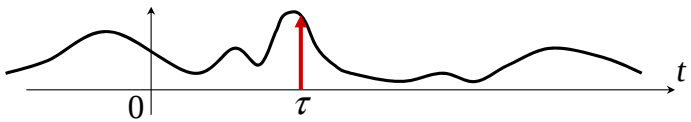


※ 他の定義の方法（ガウス関数、sinc関数など）もある

Diracのデルタ関数

p.56

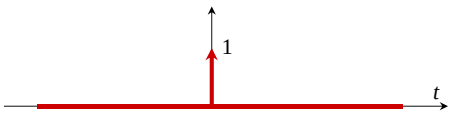
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-\tau)dt = \phi(\tau)$$



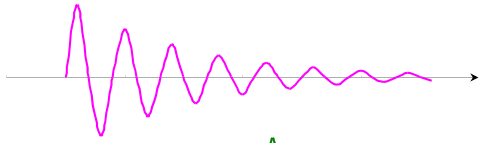
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{if} \quad t \neq 0$$

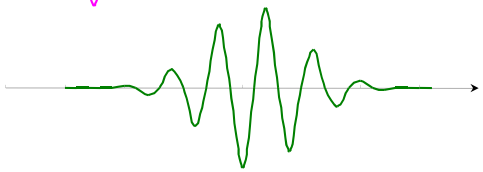
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



解析的に表すことのできる信号の例



$$x(t) = e^{-at}\sin(bt)$$



$$x(t) = e^{-at^2}\sin(bt)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(\frac{t-nb}{a})$$

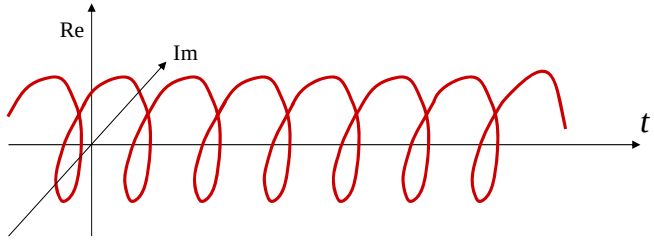
$$x(t) = b\, p(\frac{t}{a})t$$

複素正弦波

$$x(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)} = Ae^{j(2\pi f t+\phi)} = Ae^{j\omega t}e^{j\phi}$$

$$= A\{\cos(\omega t+\phi) + j\sin(\omega t+\phi)\}$$

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = A\cos(\omega t+\phi)$$



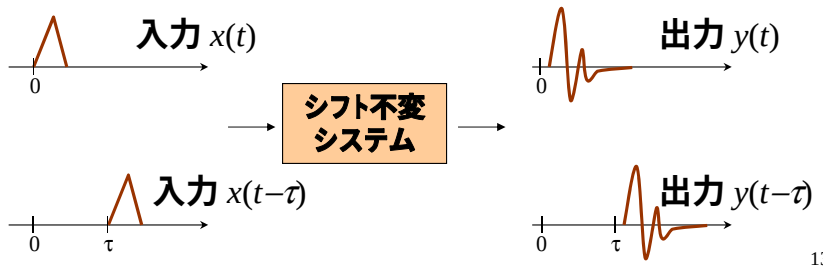
◆ $x(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}$ を $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ と書き換えたとき、複素定数 a, b を求めよ。

シフト不変システム

- 連続時間システム $y(t) = S\{\ x(t)\ \}$
- 任意の時間 τ だけシフトした入力に対して、出力の形は変わらずに同じ時間だけシフトする、すなわち、

  $y(t-\tau) = S\{\ x(t-\tau)\ \}$

  となるとき、そのシステムを**時不変システム**、または**シフト不変システム**と言う



1．2　線形システム

p.60

- 連続時間システム $y(t) = S\{\ x(t)\ \}$
- 以下の(1)(2)が成り立つシステム$S\{\}$を**線形システム**と言う。

  (1)　$S\{\ a\,x(t)\ \} = a\,y(t)$

  (2)　$y_1(t) = S\{\ x_1(t)\ \}$,　$y_2(t) = S\{\ x_2(t)\ \}$　のとき、

  $S\{\ x_1(t) + x_2(t)\ \} = S\{\ x_1(t)\ \} + S\{\ x_2(t)\ \} = y_1(t) + y_2(t)$

入力 $a_1 x_1 + a_2 x_2$ ⟶ **線形システム** ⟶ 出力 $a_1 y_1 + a_2 y_2$

- 線形連続時間システム $y(t) = S\{\ x(t)\ \}$の入出力関係は以下の式で書くことができる

  $$y(t) = \int x(\tau)h(\tau,t)d\tau$$

  $h(\tau, t)$はシステムの入出力特性を表す関数（インパルス応答）

- 線形でないシステムを**非線形システム**と言う

線形シフト不変システム

- 線形シフト不変システムは以下の式で表せる

  $$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

  $h(t)$は**インパルス応答**。

  上記システムに単位インパルス $\delta(t)$ を入力したとき、その出力は、

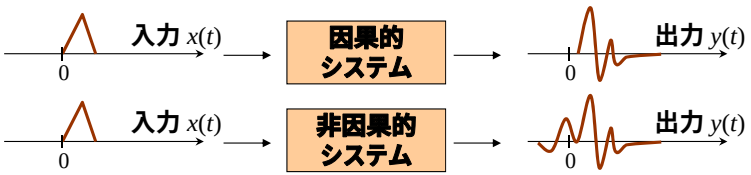
  $$y(t) = S\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t)$$

  ※ デルタ関数の性質より

- 線形シフト不変システムの式 (#) は「畳込み積分」（後述）

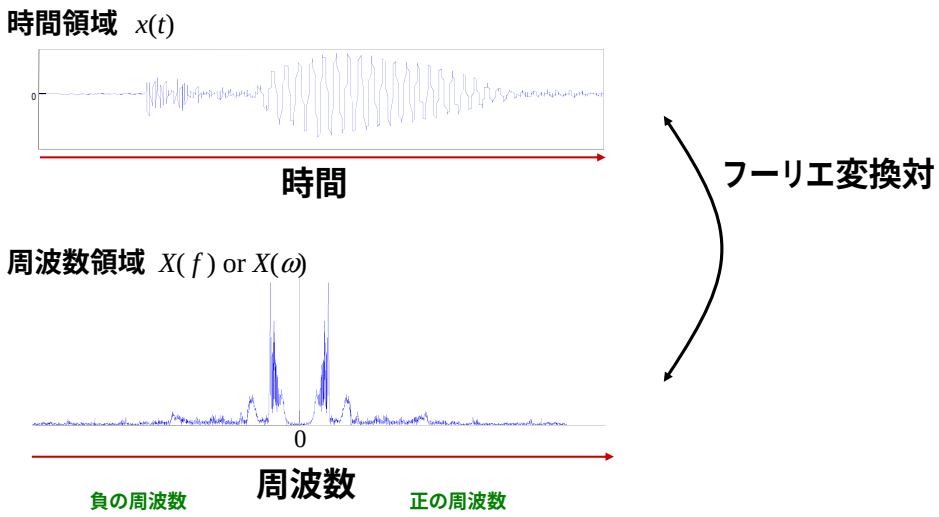
因果的システム

- 入力の与えられる時間以前に出力は変化しない性質を因果的 (Causal) と言う。
- インパルス応答 $h(t)$ が $t < 0$ で $h(t) = 0$ となるシステムを、因果的システムと呼ぶ。



- 時間信号を扱うシステムは必ず因果的である。
- 画像などのような空間領域の信号の場合には、因果的か非因果的かは本質的には意味は無い。

2．1　時間領域と周波数領域



2　フーリエ変換

p.48

- 信号をフーリエ変換　$x(t) \rightarrow X(\omega)$
  - 信号の周波数特性
  - ノイズの特性
  - サンプリング定理
  - 畳込みの計算
  - テンプレートマッチング (相互相関) の計算
- インパルス応答のフーリエ変換　$h(t) \rightarrow H(\omega)$
  - システムの周波数特性
    ex.イコライザー、フィルターの設計、周波数フィルタリング
  - 信号劣化の解析
  - 畳込みの計算

フーリエ級数展開

- 周期Tの周期信号 $x(t)$

  $x(t) = x(t - T)$

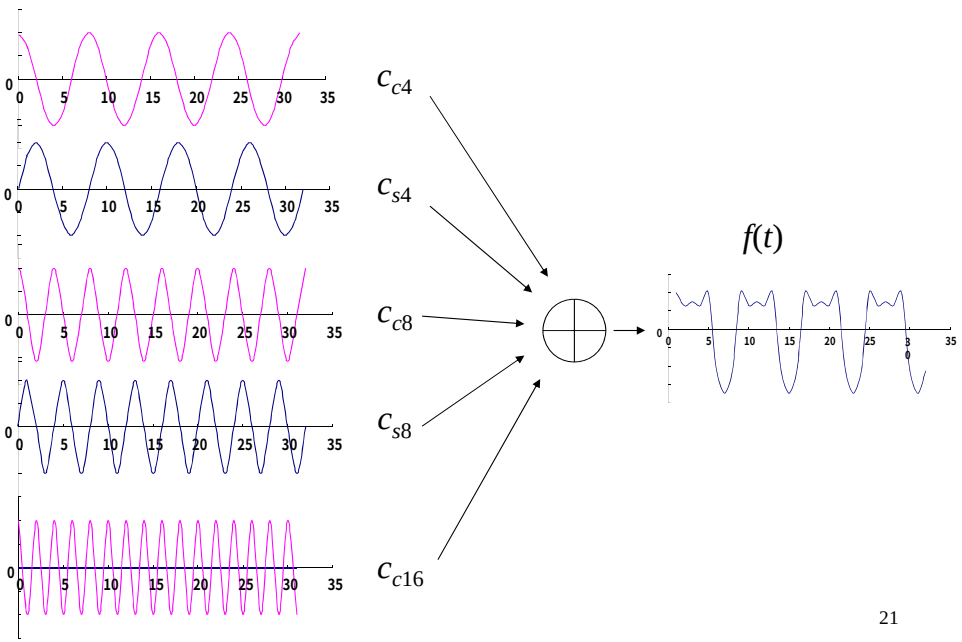
  は、角周波数　$\omega_0 = 2\pi / T$ を用いて、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

  とフーリエ級数展開の形式で表すことができる。ただし、

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

  c_n はフーリエ係数 (複素数)



フーリエ変換

p.48

- 一般的な関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

- $f(t)$ は $F(\omega)$ の逆フーリエ変換により以下で与えられる

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

フーリエ変換が存在する十分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

$f(t)$が区分的に連続（不連続点が有限個）

$F(\omega)$ について

- $f(t)$ が実数であっても $F(\omega)$ は一般に複素数

$$F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$$
$$= A(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$: 振幅，振幅スペクトル

$\phi(\omega)$: 位相、位相角、位相スペクトル

複素共役

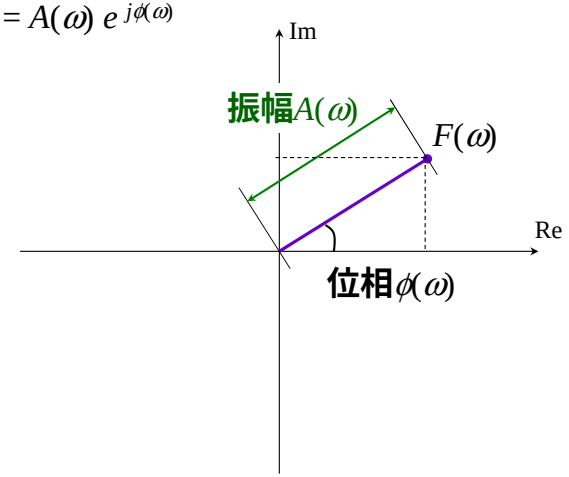
$$|F(\omega)|^2 = F(\omega)\, F^*(\omega) = A^2(\omega)$$

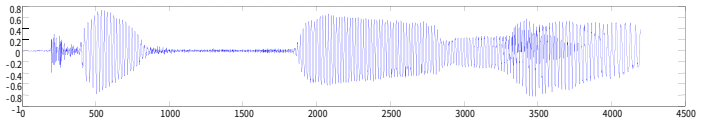
$A^2(\omega)$: エネルギースペクトル、パワースペクトル

複素平面（Gauss平面）で見たフーリエスペクトル

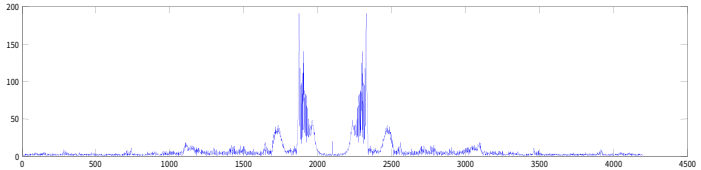
- ある一つの ω に着目

$$F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$$
$$= A(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}$$

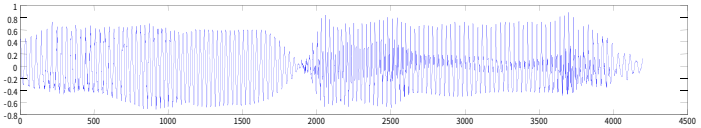




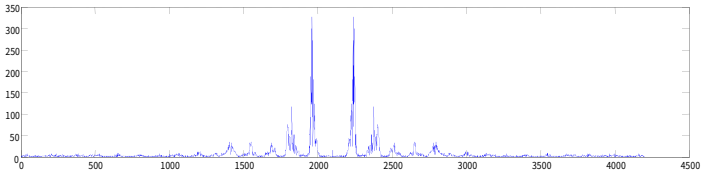
[1] 音声 (前半)



[2] [1]のフーリエ変換 (振幅)



[3] 音声 (後半)

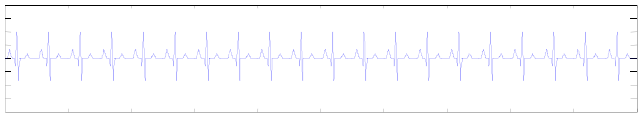


[4] [3]のフーリエ変換 (振幅)

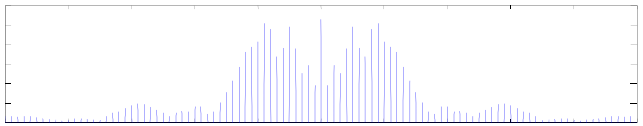
練習問題4

(1) Diracのデルタ関数$\delta(t)$ のフーリエ変換を求めよ

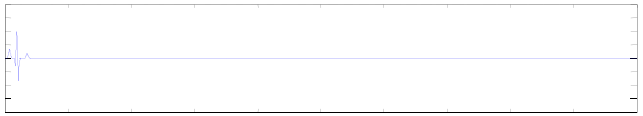
(2) $x(t) = \cos(at)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし a は実定数。



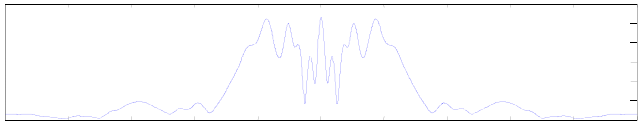
[1] 心電図波形 (模擬データ)



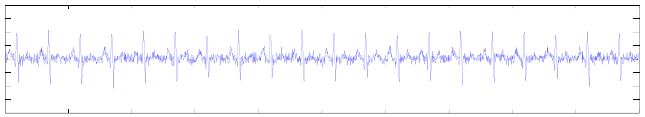
[2] [1]のフーリエ変換 (振幅)



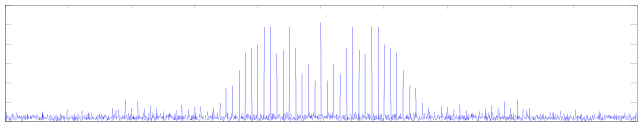
[3] [1]の1周期分



[4] [3]のフーリエ変換 (振幅)



[5] [1]にノイズ付加



[6] [5]のフーリエ変換 (振幅)

2．2 フーリエ変換の性質

p.50

(1) 線形性

a, b を任意の定数とする

$$\boldsymbol{F}\{a f_1(t) + b f_2(t)\} = a\boldsymbol{F}\{f_1(t)\} + b\boldsymbol{F}\{f_2(t)\}$$

(2) 時間軸の推移

$$\boldsymbol{F}\{f(t-a)\} = F(\omega)e^{-ja\omega}$$

直線位相

(3) 時間軸の伸縮

$$\boldsymbol{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(4) 周波数軸の推移

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{F(\omega-a)\} = f(t)e^{jat}$$

(5) 周波数軸の伸縮

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{F(a\omega)\} = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

(6) **対称性**

$$\boldsymbol{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

(7) **複素共役**

$$\boldsymbol{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega) \qquad f^*(t) = \boldsymbol{F}\{F^*(\omega)\}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{f^*(t)\} = F^*(\omega) \qquad f^*(-t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{F^*(\omega)\}$$

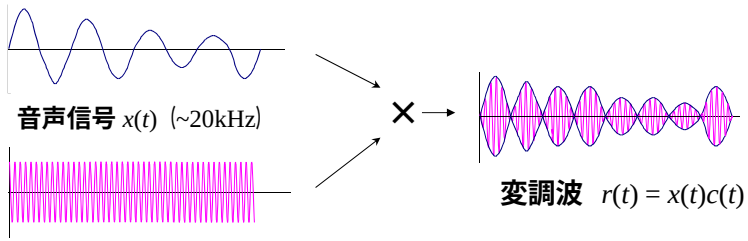
(8) **微分**

$$\boldsymbol{F}\{\frac{df(t)}{dt}\} = j\omega F(\omega)$$

$$\boldsymbol{F}\{-jt\, f(t)\} = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

補足

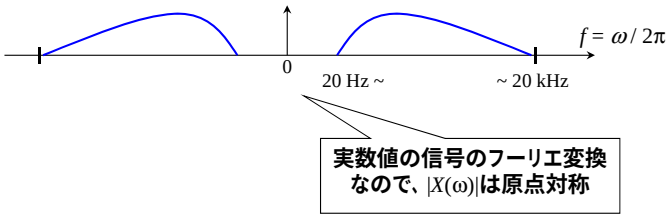
AMラジオ　(Amplitude Modulation, 振幅変調)



搬送波 $c(t)$ (**数百**kHz ~ **数**MHz)　$c(t) = \cos 2\pi f_c t$

f_c：**キャリア周波数**

音声信号のスペクトル $|X(\omega)|$



(8) **畳込み**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\boldsymbol{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega) \quad \boldsymbol{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega) \quad \textbf{のとき}$$

$$\boldsymbol{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$\boldsymbol{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

(9) **パーシバルの等式**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

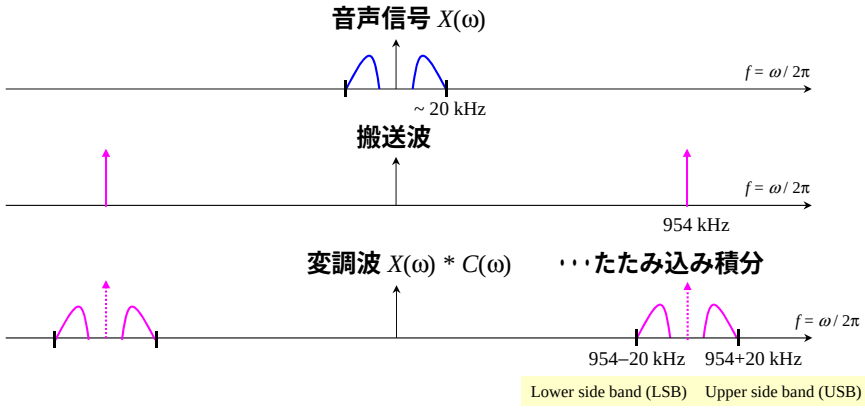
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)^2 d\omega$$

フーリエ領域で見ると

音声信号 $X(\omega)$

搬送波　$C(\omega) = \pi\{\delta(\omega - 2\pi f_c) + \delta(\omega + 2\pi f_c)\}$

変調波　$\boldsymbol{F}\{x(t)c(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * C(\omega) = \frac{1}{2}\{X(\omega - 2\pi f_c) + X(\omega + 2\pi f_c)\}$



(**計算上の**) **帯域幅** = 40kHz

(**実際の中波放送の帯域幅は**15kHz)