ディジタル電子回路

第6回

クワイン・マクラスキーの方法

カルノー図は、ひどく図形認識の感覚に頼っている！
見落としが起こることがある！

カルノー図は、最大6入力まで。実用的には4入力

もっと機械的に、コンピュータでも出来る方法を見つけよう。
要は変数が一つだけ異なるものを探して、まとめて行けば良い！

クワイン・マクラスキー法

クワイン・マクラスキーの方法

＜準備＞　1ビットだけ異なる2つの2進数の性質

下位から i 番目のビットの値だけが異なる2進数　$(A)_2$ $(B)_2$

2つの数を構成する“1”の数の差：1 ・・・(1)

10進数に直して両者の差をとると・・・　2^{i-1} となる。 ・・・(2)

＜例＞　$(A)_2=(1001)_2$　$(B)_2=(1101)_2$　下位から3ビット目が違う

“1”の数：Aは2個、Bは3個で差は1個
$(A)_{10}=9$, $(B)_{10}=13$ その差は $4=2^{(3-1)}$

最小項を構成している各変数を一定の順序（ABC順）でならべ、
各変数が肯定の場合は 1を、否定（補元）の場合は0を割り当てる。

上記の(1)、(2)を満たせば、それらの最小項は隣接している。

＜例＞　$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$は$(1001)_2$ に、$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$は$(1101)_2$に対応する。

1ビットだけ異なる2進数を探して、隣接する項を見つける。

クワイン・マクラスキーの方法

1ビットだけ異なる2つの2進数の性質

2つの数を構成する“1”の数の差：1 ・・・(1)

10進数に直して両者の差をとると・・・　2^{i-1} となる。 ・・・(2)

10進数の差が1の時は注意！

＜例＞　$(A)_2=(0011)_2$　$(B)_2=(0100)_2$　1ビット以上（3ビット）違う。

“1”の数：Aは2個、Bは1個で差は－1個
$(A)_{10}=3$, $(B)_{10}=4$ その差は $1=2^0$

要は1ビットだけ異なる2進数を見つけたい。

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1ビットだけ異なる2進数を探して、隣接する項を見つけ、簡単化する。

教科書では、10進法の値が書いてあるが、実はこれは
クワイン・マクラスキー法には要らない・・・
実際に計算を行うために、もうすこし簡略化しよう。

まずABCが　$01-$　などだと判りにくいので、ビット数で書く
すなわち3ビットなので、$32-$　のようにしよう。

$$f = A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$

は、　$f=\{43\overline{2}\,\overline{1},\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}1,4\overline{3}\,\overline{2}1,\overline{4}\,\overline{3}21,\overline{4}321,4321,\overline{4}\,\overline{3}2\overline{1},\overline{4}32\overline{1}\}$
と書ける。

クワイン・マクラスキー法による簡単化

$f=\{43\overline{2}\,\overline{1},\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}1,4\overline{3}\,\overline{2}1,\overline{4}\,\overline{3}21,\overline{4}321,4321,\overline{4}\,\overline{3}2\overline{1},\overline{4}32\overline{1}\}$

1の数で仕分ける

1の数=0
無し

1の数=1
$\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}1$
$\overline{4}\,\overline{3}2\overline{1}$

1の数=2
$43\overline{2}\,\overline{1}$
$4\overline{3}\,\overline{2}1$
$\overline{4}\,\overline{3}21$
$\overline{4}32\overline{1}$

1の数=3
$\overline{4}321$

1の数=4
4321

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す　見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1

$\bar{4}\bar{3}\bar{2}1$ ✓ ($4\bar{3}\bar{2}1$, $\bar{4}\bar{3}21$)

$\bar{4}\bar{3}2\bar{1}$

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

$4\bar{3}\bar{2}1$ ✓

$\bar{4}\bar{3}21$ ✓

$\bar{4}32\bar{1}$

1の数=3

$\bar{4}321$

1の数=4

4321

1の数=0

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す　見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1

$\bar{4}\bar{3}\bar{2}1$ ✓ ($4\bar{3}\bar{2}1$, $\bar{4}\bar{3}21$)

$\bar{4}\bar{3}2\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}\bar{3}21$, $\bar{4}32\bar{1}$)

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

$4\bar{3}\bar{2}1$ ✓

$\bar{4}\bar{3}21$ ✓

$\bar{4}32\bar{1}$ ✓

1の数=3

$\bar{4}321$

1の数=4

4321

1の数=0

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

$\bar{4}\bar{3}2$

$\bar{4}2\bar{1}$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す　見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1

$\bar{4}\bar{3}\bar{2}1$ ✓ ($4\bar{3}\bar{2}1$, $\bar{4}\bar{3}21$)

$\bar{4}\bar{3}2\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}\bar{3}21$, $\bar{4}32\bar{1}$)

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

$4\bar{3}\bar{2}1$ ✓

$\bar{4}\bar{3}21$ ✓ ($\bar{4}321$)

$\bar{4}32\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}321$)

1の数=3

$\bar{4}321$ ✓

1の数=4

4321

1の数=1

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

$\bar{4}\bar{3}2$

$\bar{4}2\bar{1}$

1の数=2

$\bar{4}21$

$\bar{4}32$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す　見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1

$\bar{4}\bar{3}\bar{2}1$ ✓ ($4\bar{3}\bar{2}1$, $\bar{4}\bar{3}21$)

$\bar{4}\bar{3}2\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}\bar{3}21$, $\bar{4}32\bar{1}$)

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

$4\bar{3}\bar{2}1$ ✓

$\bar{4}\bar{3}21$ ✓ ($\bar{4}321$)

$\bar{4}32\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}321$)

1の数=3

$\bar{4}321$ ✓ (4321)

1の数=4

4321 ✓

1の数=1

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

$\bar{4}\bar{3}2$

$\bar{4}2\bar{1}$

1の数=2

$\bar{4}21$

$\bar{4}32$

1の数=3

321

クワイン・マクラスキー法による簡単化

一つ目が終わったら、チェックが付かなかったものを残し、もう一回行う。

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

1の数=1

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

$\bar{4}\bar{3}2$ ✓ ($\bar{4}32$)

$\bar{4}2\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}21$)

1の数=2

$\bar{4}21$ ✓

$\bar{4}32$ ✓

1の数=3

321

1の数=1

$\bar{4}2$

$\bar{4}2$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

もうないので、チェックが付いていないもの（主項）だけ書き出す。

1の数=2

$43\bar{2}\bar{1}$

1の数=1

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

$\bar{4}\bar{3}2$ ✓ ($\bar{4}32$)

$\bar{4}2\bar{1}$ ✓ ($\bar{4}21$)

1の数=2

$\bar{4}21$ ✓

$\bar{4}32$ ✓

1の数=3

321

1の数=1

$\bar{4}2$

$\bar{4}2$

$43\bar{2}\bar{1}$

$\bar{3}\bar{2}1$

$\bar{4}\bar{3}1$

321

$\bar{4}2$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

選択表を作る。　表の上側にはすべての最小項を書く　左に各主項を書く
各主項が表すことのできる最小項の欄に　印を付ける。

	$43\bar2\bar1$	$\bar4\bar3\bar2 1$	$4\bar3\bar2 1$	$\bar4\bar3 21$	$\bar4 321$	4321	$\bar4\bar3 2\bar1$	$\bar4 32\bar1$
$43\bar2\bar1$	✓							
$\bar3\bar2 1$		✓	✓					
$\bar4\bar3 1$		✓		✓				
321					✓	✓		
$\bar4 2$				✓	✓		✓	✓

クワイン・マクラスキー法による簡単化

選択表を作る。

	$43\bar2\bar1$	$\bar4\bar3\bar2 1$	$4\bar3\bar2 1$	$\bar4\bar3 21$	$\bar4 321$	4321	$\bar4\bar3 2\bar1$	$\bar4 32\bar1$
$43\bar2\bar1$	✓							
$\bar3\bar2 1$		✓	✓					
$\bar4\bar3 1$		✓		✓				
321					✓	✓		
$\bar4 2$				✓	✓		✓	✓

縦に1カ所だけの主項は○で囲む

クワイン・マクラスキー法による簡単化

選択表を作る。

	$43\bar2\bar1$	$\bar4\bar3\bar2 1$	$4\bar3\bar2 1$	$\bar4\bar3 21$	$\bar4 321$	4321	$\bar4\bar3 2\bar1$	$\bar4 32\bar1$
$43\bar2\bar1$	✓							
$\bar3\bar2 1$		✓	✓					
$\bar4\bar3 1$		✓		✓				
321					✓	✓		
$\bar4 2$				✓	✓		✓	✓

縦に1カ所だけの主項は○で囲む
その主項の ✓も○で囲む
全ての最小項の下に○が有れば終わり　$43\bar2\bar1, \bar3\bar2 1, 321, \bar4 2$
　なければ、文字数が少なくなるように、主項を選ぶ
これを記号に戻すと　$f=A \bullet B \bullet \bar C \bullet \bar D + \bar B \bullet \bar C \bullet D + B \bullet C \bullet D + \bar A \bullet C$

カルノー図で確認

$43\bar2\bar1$ $\bar4\bar3\bar2 1$ $4\bar3\bar2 1$ $\bar4\bar3 21$ $\bar4 321$ 4321 $\bar4\bar3 2\bar1$ $\bar4 32\bar1$ だから

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01	1			1
11	1	1	1	
10	1	1		

$$f=A \bullet B \bullet \bar C \bullet \bar D + \bar B \bullet \bar C \bullet D + B \bullet C \bullet D + \bar A \bullet C$$

クワイン・マクラスキー法による簡単化

ちなみにこんな選択表だと

	$43\bar2\bar1$	$\bar4\bar3 21$	$\bar4 321$	4321	$432\bar1$	
$\bar4\bar3 1$		✓				α
$4\bar2\bar1$	✓					β
$\bar4 21$		✓	✓			γ
$43\bar1$	✓				✓	δ
432				✓	✓	ε
321			✓	✓		ζ

1カ所も○がつけられない・・・・
ただし $43\bar2\bar1$ を実現するには、
$4\bar2\bar1$ か $43\bar1$ のどちらかが必要
書くのが面倒なので、
横の様にギリシャ文字を当てると

$$(\beta+\delta)(\alpha+\gamma)(\gamma+\zeta)(\varepsilon+\zeta)(\delta+\varepsilon)$$
$$=(\alpha\zeta+\gamma)(\varepsilon+\zeta)(\delta+\beta\varepsilon)=(\alpha\zeta+\gamma)(\delta\varepsilon+\beta\varepsilon+\zeta\delta)$$
$$=\alpha\zeta\delta\varepsilon+\alpha\zeta\beta\varepsilon+\alpha\zeta\delta+\gamma\delta\varepsilon+\gamma\beta\varepsilon+\gamma\zeta\delta$$
$$=\alpha\zeta\beta\varepsilon+\alpha\zeta\delta+\gamma\delta\varepsilon+\gamma\beta\varepsilon+\gamma\zeta\delta$$

右の四つはどれか
成立すればよい

ドントケアが有る場合

次にドントケアが有る場合を考えよう
ここで0から4までの数が偶数かどうかを判定する回路を考えよう。
変数は5コなので、3ビット必要である。

偶数の0,2,4　は　$\bar3\bar2\bar1$ $\bar3 2\bar1$ $3\bar2\bar1$　が出力である。
でも、ドントケアは5より上なので、321 321 321 の三つある。

合わせて $\bar3\bar2\bar1$ $\bar3 2\bar1$ $3\bar2\bar1$ $3\bar2 1$ $32\bar1$ 321 の六つで
クラインマクラスキー法を行う

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$
$3\bar{2}\bar{1}$

1の数=2
$3\bar{2}1$
$32\bar{1}$

1の数=3
321

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=2
$3\bar{2}1$
$32\bar{1}$

1の数=3
321

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$
$\bar{2}\bar{1}$

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=2
$3\bar{2}1$ ✓
$32\bar{1}$ ✓

1の数=3
321

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$
$\bar{2}\bar{1}$

1の数=1
$2\bar{1}$
$3\bar{2}$
$3\bar{1}$

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=2
$3\bar{2}1$ ✓
$32\bar{1}$ ✓

1の数=3
321 ✓

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$
$\bar{2}\bar{1}$

1の数=1
$2\bar{1}$
$3\bar{2}$
$3\bar{1}$

1の数=2
31
32

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=2
$3\bar{2}1$ ✓
$32\bar{1}$ ✓

1の数=3
321 ✓

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$ ✓
$\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}$
$3\bar{1}$ ✓

1の数=2
31
32

1の数=0
$\bar{1}$

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=2
$3\bar{2}1$ ✓
$32\bar{1}$ ✓

1の数=3
321 ✓

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$ ✓
$\bar{2}\bar{1}$ ✓

1の数=1
$2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}$ ✓
$3\bar{1}$ ✓

1の数=2
31 ✓
32 ✓

1の数=0
$\bar{1}$

1の数=1
3

ドントケアが有る場合

$f=\{\bar{3}\bar{2}\bar{1}\ \bar{3}2\bar{1}\ 3\bar{2}\bar{1}\ 3\bar{2}1\ 32\bar{1}\ 321\}$

1の数=0
$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$ ✓
1の数=1
$\bar{3}2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}\bar{1}$ ✓
1の数=2
$3\bar{2}1$ ✓
$32\bar{1}$ ✓
1の数=3
321 ✓

1の数=0
$\bar{3}\bar{1}$ ✓
$\bar{2}\bar{1}$ ✓
1の数=1
$2\bar{1}$ ✓
$3\bar{2}$ ✓
$3\bar{1}$ ✓
1の数=2
31 ✓
32 ✓

1の数=0
$\bar{1}$
1の数=1
3

主項は

$3, \bar{1}$

ドントケアが有る場合

選択表を作る。上の最小項にはドントケアは含まない

	$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	$\bar{3}2\bar{1}$	$3\bar{2}\bar{1}$
3			✓
$\bar{1}$	✓	✓	✓

必要な主項は $\bar{1}$ だけ

クワインマクラスキー法は面倒・・・だけど、
間違えなければ直感が要らない方法

NANDの回路を簡単化しよう

先々週に示したように、積和形はNANDのみの回路に出来る

したがって、積和形の簡単化はカルノーマップなどで行える。

ところが、NANDのみで起こる簡単化がある。

まず積和形は以下の形に書ける

$$f=H_1\bullet\overline{T_1}\bullet\overline{T_2}\bullet\overline{T_3}\cdots+H_2\bullet\overline{T_4}\bullet\overline{T_5}\bullet\overline{T_6}\cdots+\cdots$$

ここで H_i は肯定型変数からなるAND項でヘッドと呼ぶ

$\overline{T_1}\bullet\overline{T_2}\bullet\overline{T_3}\cdots$ は否定型変数からなる項でテイルと呼ぶ

$$f=H_1\bullet\overline{T_1}+H_1\bullet\overline{T_2}$$
$$=H_1\bullet(\overline{T_1}+\overline{T_2})=H_1\bullet\overline{T_1\bullet T_2}$$

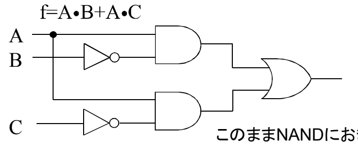
なので、ヘッドの同じ項はまとめられる。

NANDの回路を簡単化しよう

$$f=H_1\bullet\overline{T_1}+H_1\bullet\overline{T_2}$$
$$=H_1\bullet(\overline{T_1}+\overline{T_2})=H_1\bullet\overline{T_1\bullet T_2}$$

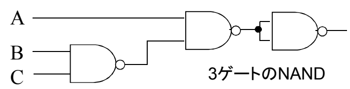
はあまり簡単になったように見えないので、回路で示そう。

$f=A\bullet\overline{B}+A\bullet\overline{C}$



このままNANDにおきかえると5ゲート

$f=A\bullet\overline{B\bullet C}$



3ゲートのNAND

NANDの回路を簡単化しよう

テイルが共通化するとまとめられる。
そこで、故意にテイル項を無理やりつくる。

$$H_1\bullet\overline{T_1}\bullet\overline{T_2}=H_1\bullet\overline{T_1}\bullet\overline{hT_2}$$

というふうにヘッド項に含まれる変数hをテイル項に
含ませて作る。上の式は

$$A\bullet\overline{B}=A\bullet\overline{A}+A\bullet\overline{B}$$
$$=A\bullet(\overline{A}+\overline{B})=A\bullet(\overline{A\bullet B})$$

で理解できる。

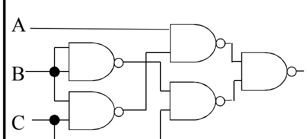
NANDの回路を簡単化しよう

例えば

$$A\bullet\overline{B\bullet C}+C\bullet\overline{B}=A\bullet\overline{B\bullet C}+C\bullet\overline{B\bullet C}$$

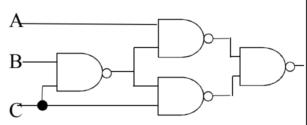
は、一見複雑化しているように見える。
でも回路を作ると

$A\bullet\overline{B\bullet C}+C\bullet\overline{B}$



NAND5ゲート

$A\bullet\overline{B\bullet C}+C\bullet\overline{B\bullet C}$



NAND4ゲート

NORの回路を簡単化しよう

和積形はNORのみの回路に出来る

したがって、和積形の簡単化をまず行う。
和積形の簡単化は、先週話したように、

0に注目して、そこを1に置き換えて、
積和形の簡単化を行って
それから、全て補元を取り、+を･に、･を＋に置き換える。

そこで、NANDの簡単化まで行ってから、
全て補元を取り、NANDをNORに置き換えるのも等価である。

手法としては、NANDの簡単化と全く同じである。