ディジタル電子回路

第2回

論理関数の諸定理

【定理1】 $A \cdot A = A$ ベキ等則

$A + A = A$

＜証明＞

第1式　公理3の第2式を用いると

$$A \cdot A = A \cdot (A + (A \cdot B)) = A \cdot (A + C)$$

$(A \cdot B)$をCとおく

よって公理3の第1式より

$$A \cdot A = A$$

第2式　公理3の第1式を用いて$(A+B)$をDとおくと

$$A + A = A + (A \cdot (A + B)) = A + (A \cdot D)$$
$$= A$$

定理1の第1式と第2式は互いに双対の関係にある。
双対性のある公理から導かれる定理にも双対性がある。

論理関数の諸定理

【定理2】 $A \cdot 1 = A$

$A + 0 = A$

＜証明＞　第1式　公理5の第2式を用いると

$$A \cdot 1 = A \cdot (A + \overline{A})$$

よって公理3の第1式より　$A \cdot 1 = A$

【定理3】 $A \cdot 0 = 0$

$A + 1 = 1$

＜証明＞　第1式　公理5の第1式を用いると

$$A \cdot 0 = A \cdot (A \cdot \overline{A})$$
$$= (A \cdot A) \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{A}$$
$$= 0$$

論理関数の諸定理

【定理4】 $\overline{(\overline{A})} = A$

＜証明＞

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} \underset{\text{定理2}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} + 0 \underset{\text{公理5}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} + A \bullet \overline{A} \underset{\text{公理4}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + \overline{A}\right)$$
$$\underset{\text{公理5}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet 1 \underset{\text{公理5}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet \left(A + \overline{A}\right)$$
$$\underset{\text{公理4}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet A + A \bullet A + \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet \overline{A} + A \bullet \overline{A} \underset{\text{公理5}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet A + A \underset{\text{公理5/定理2}}{=} A$$

【定理5】 Aの補元 $\overline{A}$ はただ一つ存在する。

＜証明＞　A が異なる2つの補元 $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ を持ったとすると、

$$\overline{A}_1 \underset{\text{定理2}}{=} \overline{A}_1 \cdot 1 \underset{\text{公理5}}{=} \overline{A}_1 \cdot (A + \overline{A}_2) \underset{\text{公理4}}{=} \overline{A}_1 \cdot A + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$$
$$\underset{\text{公理5}}{=} 0 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \underset{\text{公理5}}{=} A \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \underset{\text{公理4}}{=} \overline{A}_2 \cdot (A + \overline{A}_1) \underset{\text{公理5}}{=} \overline{A}_2 \cdot 1$$
$$\underset{\text{定理2}}{=} \overline{A}_2$$

論理関数の諸定理

【定理6】 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ **ド・モルガンの定理**

$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

＜証明＞ $\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}$がA+Bの補元であることを示す。

$$(A + B) + \overline{A} \bullet \overline{B} \underset{\text{公理4}}{=} \left((A + B) + \overline{A}\right) \bullet \left((A + B) + \overline{B}\right)$$
$$\underset{\text{公理1、2}}{=} \left((A + \overline{A}) + B\right) \bullet \left(A + (B + \overline{B})\right)$$
$$\underset{\text{公理5}}{=} (1 + B) \bullet (A + 1) \underset{\text{定理3}}{=} 1 \bullet 1$$
$$= 1$$

$$(A + B) \bullet \left(\overline{A} \bullet \overline{B}\right) \underset{\text{公理4}}{=} A \bullet \left(\overline{A} \bullet \overline{B}\right) + B \bullet \left(\overline{A} \bullet \overline{B}\right)$$
$$\underset{\text{公理1、2}}{=} \left(A \bullet \overline{A}\right) \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet \left(B \bullet \overline{B}\right)$$
$$\underset{\text{公理5}}{=} 0 \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet 0 \underset{\text{定理3}}{=} 0 + 0$$
$$= 0$$

ド・モルガンの定理

$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

重要：必ず覚えておくこと。

一般に論理関数 f(A,B,C,…, +, ・)が与えられた時、$\overline{f}$ は f の各変数の補元をとり、論理記号＋、・を入れ替えて得られる。

$$\overline{f}(\mathrm{A, B, C}, \ldots, +, \cdot) = f(\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{C}}, \ldots, \cdot, +)$$

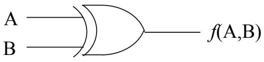
Aを $\overline{A}$ に

入れ替え

論理関数の組み立てと展開

真理値表が与えられた時、どのように論理関数を求めるか？

＜例題1＞ 排他的論理和　(XOR, EXOR: Exclusive OR)



真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

論理式による表現

$f(A,B) = A \oplus B$

$f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

この論理式はどうやって導出するか？

演習でやった通り、複数の表現がある。

XORの論理式

＜例題1＞排他的論理和　(XOR: Exclusive OR)

真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

AまたはBのいずれか一方だけが1の時論理関数f(A,B)の値は1となる。

(A,B)=(0,1) または (A,B)=(1,0)の時に f(A,B)=1となる

$f(A,B) = f(0,1) + f(1,0)$

A=0かつB=1の時だけf(0,1)=1であるから

$f(0,1) = \overline{A} \cdot B$

同様に、A=1かつB=0の時だけf(0,1)=1であるから

$f(1,0) = A \cdot \overline{B}$

よって、 $f(A,B) = \overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

例題2

＜例題2＞多数決回路　(A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

f(A,B,C)＝1となるA,B,Cの組み合わせに注目

f(A,B,C)=1となるのはこれらの組み合わせのいずれかの場合。

$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$

f(0,1,1) はA=0, B=1, C=1が同時に成立するときだけ1となる。

$f(0,1,1) = \overline{A} \cdot B \cdot C$

他項も同様にして

$f(1,0,1) = A \cdot \overline{B} \cdot C$　　$f(1,1,0) = A \cdot B \cdot \overline{C}$　　$f(1,1,1) = A \cdot B \cdot C$

$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

真理値表から論理関数を求める方法(1)

論理関数 f は、f の値が 1 となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、その変数の値が 1 の時はそのまま、0 の時は補元(¯)をとり、すべての変数についてANDをとった項を、ORで結んで組み立てる。(積和形、AND-OR)

＜問題＞ 以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$\overline{A} \cdot B \cdot C$のような、すべての入力変数を1つだけ含む積のことを最小項という。(極小項とも言う)

加法標準形：論理関数を最小項の論理和として表現したもの

例題2

前出のスライド

＜例題2＞多数決回路　(A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

f(A,B,C)＝1となるA,B,Cの組み合わせに注目

f(A,B,C)=1となるのはこれらの組み合わせのいずれかの場合。

$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$

f(0,1,1) はA=0, B=1, C=1が同時に成立するときだけ1となる。

$f(0,1,1) = \overline{A} \cdot B \cdot C$

他項も同様にして

$f(1,0,1) = A \cdot \overline{B} \cdot C$　　$f(1,1,0) = A \cdot B \cdot \overline{C}$　　$f(1,1,1) = A \cdot B \cdot C$

$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

展開定理(1)

n 変数$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$

任意の変数 X_iについて、次のように展開できる。

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$

＜例題2を例にとると＞ $f(A, B, C) = A \cdot f(1, B, C) + \overline{A} \cdot f(0, B, C)$

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(1, B, C) = \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} + B \cdot C$

$f(0, B, C) = B \cdot C$

$f(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

前の結果と比較してみよ。

＜問＞ Bに関して展開し、同じ論理式が得られることを確認せよ。

展開定理（1）

n 変数$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$

＜例題2を例にとると＞ $f(A, B, C) = B \cdot f(A, 1, C) + \overline{B} \cdot f(A, 0, C)$

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A, 1, C) = \overline{A} \cdot C + A \cdot \overline{C} + A \cdot C$

$f(A, 0, C) = A \cdot C$

$f(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

展開定理の証明

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = \underbrace{(X_i + \overline{X_i})}_{=1} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$

$= X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$

第１項は $X_i=1$ のときだけ、$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ に等しい。

第２項は $X_i=0$ $(\overline{X_i}=1)$ のときだけ、$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ に等しい。

よって

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$

展開定理

展開定理を繰り返し適用すると‥

$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, X_j, \cdots, X_n)$

$= X_i \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, X_j, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, X_j, \cdots, X_n)$

$= X_i \cdot X_j \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, 1, \cdots, X_n) + X_i \cdot \overline{Xj} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, 0, \cdots, X_n)$

$+ \overline{X_i} \cdot X_j \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i} \cdot \overline{X_j} \cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, 0, \cdots, X_n)$

これをすべての変数に対して
行うと･･･

$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$

$+ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 0)$

$+ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \overline{\cdot \ldots} \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 0, 1)$

$+ \ldots\ldots\ldots +$

$+ X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$

$+ \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$

加法標準形

真理値表から論理関数を求める方法（2）

真理値表の0に着目する方法もある。

＜例題1＞ 排他的論理和 (XOR: Exclusive OR)

真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

AとBが一致するとき $f(A,B)$の値は0となる。

$(A,B)=(0,0)$, $(A,B)=(1,1)$の時 $f(A,B)=0$

この時、$\overline{f(A,B)} = 1$

$\overline{f(A,B)} = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$

$f(A,B) = \overline{\overline{f(A,B)}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B}$

$= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})} \cdot \overline{(A \cdot B)}$

$= (A+B) \cdot (\overline{A}+\overline{B})$

$= A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

真理値表から論理関数を求める方法（2） 例題2

＜例題2＞ 今回は $f(A,B,C)=0$となるA,B,Cの組み合わせに注目

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A,B,C)=0$、すなわち $\overline{f(A,B,C)}=1$となるのは
これらの組み合わせのいずれか。

$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$f(A,B,C) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$

$= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)} \cdot \overline{(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})}$

$= (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$

＜問＞
上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

真理値表から論理関数を求める方法（2）

論理関数 f は、f の値が 0 となる入力変数の値 0, 1 の組み合わせについて、その変数の値が 0 の時はそのまま、1 の時は補元（¯）をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで組み立てる。（和積形 OR-AND）

＜問題＞ 以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(A,B,C) = (\overline{A}+B+\overline{C}) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

$\overline{A}+\overline{B}+C$のような、すべての入力変数を
１つだけ含む和のことを最大項という。

乗法標準形：論理関数を最大項の論理積として表現したもの

展開定理（２） 乗法標準系

$$f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_n) = (X_i + f(X_1, X_2, \cdots 0, \cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \cdots 1, \cdots X_n))$$

$$f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_n) = X_i \cdot \overline{X_i} + f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_n)$$
$$= (X_i + f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_n))$$
$$= (X_i + f(X_1, X_2, \cdots 0, \cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \cdots 1, \cdots X_n))$$

＜再び例題2を例にとってみよう＞

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A, B, C) = (A + f(0, B, C)) \cdot (\overline{A} + f(1, B, C))$$

$$f(0, B, C) = (B+C) \cdot (B+\overline{C}) \cdot (\overline{B}+C)$$

$$f(1, B, C) = B+C$$

$$f(A, B, C) = (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$$

分配則 $A+(B \cdot C)=(A+B) \cdot (A+C)$

前の結果と比較してみよ。

真理値表から論理関数を求める方法（2）　例題2

＜例題2＞ 今回は f(A,B,C)＝0となるA,B,Cの組み合わせに注目

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

f(A,B,C)=0、すなわち $\overline{f(A,B,C)}$=1となるのは
これらの組み合わせのいずれか。

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$$
$$= (\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}) \cdot (\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C}) \cdot (\overline{\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}}) \cdot (\overline{A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}})$$
$$= (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$$

前出のスライド

＜問＞
上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

展開定理（２）を繰り返し適用すると・・・

$$f(X_1, X_2, \cdot\cdot, X_i, X_j, \cdot\cdot, X_n)$$
$$= (X_i + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, X_j, \cdot\cdot, X_n)) \cdot (\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 1, X_j, \cdot\cdot, X_n))$$

第１項 $= X_i + (X_j + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot, X_n)) \cdot (\overline{X_j} + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 1, \cdot\cdot, X_n))$

$= (X_i + X_j + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot, X_n)) \cdot (X_i + \overline{X_j} + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 1, \cdot\cdot, X_n))$

第２項 $= (\overline{X_i} + X_j + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 1, 0, \cdot\cdot, X_n)) \cdot (\overline{X_i} + \overline{X_j} + f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 1, 1, \cdot\cdot, X_n)))$

これをすべての変数に対して行うと・・・

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0))$$
$$\cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+\overline{X_n}+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 1))$$
$$\cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 1, 0))$$
$$\cdot \ \cdots\cdots\cdots \ \cdot$$
$$\cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+X_3+\overline{\ldots}+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$
$$\cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}+\ldots+\overline{X_{n-1}}+\overline{X_n}+f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$

まとめー加法標準形ー

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$$
$$+ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 0)$$
$$+ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{\ldots} \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 0, 1)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots +$$
$$+ X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$+ \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{\ldots} \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値　と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が1となるようなAND
から構成されている。
真理値表の1の項と各最小項が1対1対応している。

任意の論理関数は、・、+、¯ を用いて書くことができる。
（AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。）

まとめー乗法標準形ー

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0))$$
$$\cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+\overline{X_n}+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 1))$$
$$\cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 1, 0))$$
$$\cdot \ \cdots\cdots\cdots \ \cdot$$
$$\cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+X_3+\overline{\ldots}+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$
$$\cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}+\ldots+\overline{X_{n-1}}+\overline{X_n}+f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値　と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が0となるようなOR
から構成されている。
真理値表の1の項と各最大項が1対1対応している。

任意の論理関数は、・、+、¯ を用いて書くことができる。
（AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。）

用語について

- リテラル：ある論理変数 X が与えられたとき、$\overline{X}$ または X を
  リテラルという。
  リテラルの論理積を「積項」、論理和を「和項」と呼ぶ。
- 最小項（極小項）：すべての入力変数を１回だけ含む積項
  ABC、A$\overline{B}$C　など
- 最大項（極大項）：すべての入力変数を１回だけ含む和項
  A+B+C,　A+B+$\overline{C}$　など
- 加法標準形：論理関数を最小項の論理和で表現したもの。
  （主加法標準形/選言標準形/最小項表現/極小項表現とも呼ぶ）
- 乗法標準形：論理関数を最大項の論理積で表現したもの。
  （主乗法標準形/連言標準形/最大項表現/極大項表現とも呼ぶ）
- リード・マラー展開　（EX-ORだけで表す）でも標準形がある

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・

例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。f(A,B)を展開すると、

$$f(A,B) = A\cdot B\cdot f(1,1) + A\cdot\overline{B}\cdot f(1,0) + \overline{A}\cdot B\cdot f(0,1) + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot f(0,0)$$

真理値表より $f(1,1) = f(0,0) = 0$
$f(1,0) = f(0,1) = 1$

$$f(A,B) = A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$$

加法標準形では、ORで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのANDで表される。

f の値が 1 となる項だけが残る。

この時の f の係数は、その f の値が1となる各変数の値0,1について、1 の場合はそのまま、0の場合は補元(　)をとり、すべての変数のANDをとった形をしており、f=1の時、その係数の値も1となる

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・

例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。f(A,B)を展開すると、

$$f(A,B) = A\cdot B\cdot f(1,1) + A\cdot\overline{B}\cdot f(1,0) + \overline{A}\cdot B\cdot f(0,1) + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot f(0,0)$$

真理値表より $f(1,1) = f(0,0) = 0$
$f(1,0) = f(0,1) = 1$

$$f(A,B) = A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$$

論理関数 f は、f の値が 1 となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、その変数の値が 1 の時はそのまま、0 の時は補元(¯)をとり、すべての変数についてANDをとった項を、ORで結んで求めることができる。

真理値表よりもとめた標準形

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

次は乗法標準形で、f(A,B)を展開すると、

$$\begin{aligned} f(A,B) &= (A+B+f(0,0))\cdot(A+\overline{B}+f(0,1))\cdot(\overline{A}+B+f(1,0))\cdot(\overline{A}+\overline{B}+f(1,1)) \\ &= (A+B+0)\cdot(A+\overline{B}+1)\cdot(\overline{A}+B+1)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+0) \\ &= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}) \end{aligned}$$

乗法標準形では、ANDで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのORで表される。

**f の値が1の時は、 その項は他の変数の値によらず1となるため、
fの値が0である項だけのANDが残る。**

残った項の変数より作られるORの値は、その f の値が0の時に0となる

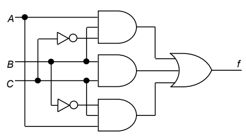
論理関数 f は、f の値が 0 となる入力変数の値 0, 1 の組み合わせについて、その変数の値が 0 の時はそのまま、1 の時は補元(¯)をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで求めることができる。

組み合わせ論理回路の実現

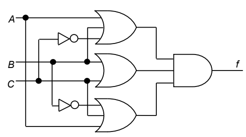
積和形:論理変数のANDをとったいくつかの項のORで表現
（最小項の論理和なら加法標準形）

和積形:論理変数のORをとったいくつかの項のANDで表現
（最大項の論理積なら乗法標準形）

＜例＞

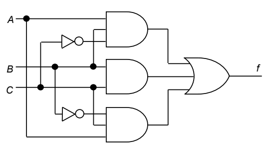


積和形　($f=AB\bar{C}+BC+A\bar{B}C$)
加法標準形ではない



和積形　($f=(A+B+\bar{C})\cdot(B+C)\cdot(A+\bar{B}+C)$)
乗法標準形ではない

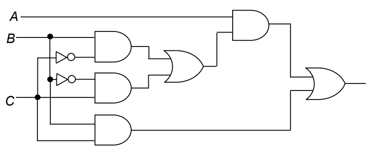
組み合わせ論理回路の実現（2）



$f = A\cdot B\cdot\overline{C} + B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C$

・論理ゲートの段数が少なく、信号の遅延が小さい。
・各ゲートの入力数は多い。

$f = A\cdot(B\cdot\overline{C} + \overline{B}\cdot C) + B\cdot C$ と変形すると、以下のような回路となる。



4段構成
各ゲートは2入力
（NOTをゲートと
見なければ・・・）

積和形と和積形

積和形:出力側から数えて奇数段目がOR、偶数段目がAND

和積形:出力側から数えて奇数段目がAND、偶数段目がOR

＜積和形の例＞