時間に関する不規則変量を x(t)とするとき、τ時間隔たった二つの変動の積の平均値

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

で定義される統計的関数を自己相関関数と呼ぶ。また、C(τ)をτ=0 の値 C(0)で割って正規化したものを、自己相関係数と呼ぶ。

$$R(\tau) = C(\tau)/C(0) = \overline{x(t)x(t+\tau)}/\overline{x^2(t)}$$

$$R(0) = 1$$

このとき以下の問いに答えよ。

問 1

もっとも単純な例として正弦波の自己相関を求める。

$$x(t) = a\sin 2\pi ft$$

(a)　x(t+τ)を求めよ。

(b)　x(t)x(t+t)を求めよ。なお、加法定理を用いて簡略化した形でかけ。

(c)　自己相関関数 C(τ)を求めよ。（周期 T=1/f とせよ）

(d)　自己相関係数 R(τ)を求めよ。

解答

(a)

$$x(t+\tau) = a\sin 2\pi f(t+\tau)$$

(b)

$$x(t)x(t+\tau) = \frac{a^2}{2}\{\cos 2\pi f\tau - \cos 2\pi f(2t+\tau)\}$$

(c)

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{a^2}{2}\{\cos 2\pi f\tau - \cos 2\pi f(2t+\tau)\}dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{Ta^2}{2}\cos 2\pi f\tau\right) = \frac{a^2}{2}\cos 2\pi f\tau$$

(d)

$$R(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)} = \cos 2\tau f\tau$$