問 1

12.1 節　仮説検定の枠組みを簡単にまとめよ。

解答

12.1 節では、まずいくつかの例が与えられている。こちら考える検定の問題は確率的な揺らぎを伴って観測されるデータに基づいて、想定している仮説が正しいか否かを統計的に判定し、意思決定を行うための指針を与えることを目的とする。

つぎ、例 12.2 を具体的に考えてみる。それは二つの集団の平均を比較して差があるかどうかを検定する問題である。この例では観測値は最も単純な確率モデルに従うとする。さらに議論を簡単にするために以下の仮定をおく。

仮定１　誤差が互いに独立に同一分布に従う(i.i.d.)。

仮定２　誤差の平均は 0 で、分散は既知である。

仮定３　それぞれの誤差は正規分布に従う。

それぞれの平均の推定量は標本平均を考えて、その差を正規化して、検定統計量 T を定められた。

以上が統計的仮説検定の基本的な考え方である。

一般には以下のような手続きになる。

(1) 観測値から計算される**検定統計量** T を定める。

(2) 帰無仮説が正しいとして T の分布を求める。

(3) 十分小さい**有意水準** α を定め、仮説が正しい時

$$P(T \in C_\alpha) = \alpha$$

となる領域 C_α を決める。この領域を**棄却域**(critical region)という。

(4) 観測された T が C_α にいれば仮説を棄却(reject)、C_α に入っていなければ仮説を受容(accept)する。

しかし、注意しなくてはいけないのは

棄却される⇒仮説が正しくない

受容される⇒仮説が正しい

と言っているわけではないことである。あくまで

棄却される⇒非常に疑わしい

受容される⇒正しくないというには証拠不十分

と言っているに過ぎない。

以上

問 2

N 回サイコロ投げをして出た目の平均値が A とする（例えば 100 回投げて出た目の平均値が 3.65 という状況を考える）。このサイコロにいかさまが施されているかどうか判定するにはどのようにすればよいか考えよ。但し N が十分大きいとする。

解答

仮定から、

$$A = \frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_N}{N}$$

但し B_i は i 回目で出た目とする。その平均は $E(B) = 3.5$ で分散は $V(B) = 35/12$ である。

N が十分大きいのであれば中心極限定理を用いることができ A は正規分布に従うように見なせる。また

$$\bar{A} = E(A) = \frac{E(B_1) + E(B_2) + \cdots + E(B_N)}{N} = \frac{7}{2}$$

$$V(A) = \frac{V(B)}{N} = \frac{35}{12N}$$

従って

$$T = \sqrt{\frac{1}{V(A)}}\left(A - \bar{A}\right) = \sqrt{\frac{12N}{35}}\left(A - \frac{7}{2}\right)$$

は標準正規分布に近づいていくので、これを用いてもよい。したがって有意水準が α であるときに

$$P\left(|T| > u_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

を満たす $u_{\alpha/2}$ を求めれば、統計量 T に対して

$|T| > u_{\alpha/2}$ ：帰無仮説を棄却

（いかさまが施された可能性高い）

$|T| \le u_{\alpha/2}$ ：帰無仮説を受容

（いかさまが施された可能性低い）

というように仮説を検定できる。

以上