# 2012年後期
# 応用確率統計

# ⑫ 確率過程

河野 行雄
kawano@pe.titech.ac.jp
2013年1月10日



# 復習

- 仮説

  帰無仮説 $H_0$ : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_0$ 」

  対立仮説 $H_1$ : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_1$ 」

- 検定統計量

  $$T \equiv \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sigma} \longleftarrow \text{分散1の正規分布}$$

- 有意水準

  $$P(|T| \geq \mu) = \alpha \longleftarrow \text{第一種の過誤}$$

- 仮説の受容と棄却

  $|T| < \mu \longrightarrow$ 帰無仮説を受容 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

  $|T| \geq \mu \longrightarrow$ 帰無仮説を棄却 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」



# 確率過程とは？

- 多変量統計学（解析）

  未知母数は $X$ の関数

  観測データ: $Y_i(X) = \theta(X) + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n)$

  $\varepsilon_i$ は i.i.d. で正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う

  2つの確率変数（変量）$X$ と $Y$ の関係を統計的に解析

- 確率過程

  $X$ が時間 $t$ のとき $Y_i(t)$ を確率過程と呼ぶ

  例: 株価、会話、雑音、交通量

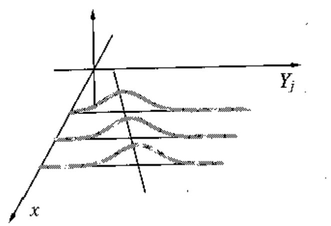


# 回帰直線

- 回帰曲線

  2つの変量 $X$ と $Y$ の関係を表す曲線

  $$y = E(Y(x)) = \theta(x)$$




- 回帰直線

  回帰係数

  $$\theta(x) = ax + b$$

  $x = t$ のとき: 回帰 ≒ 予測

  例: 温度と抵抗率、緯度と気温、努力と成績

# 尤度関数

■ 正規分布

$$f(Y_i,a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(Y_i-aX_i-b)^2}{2\sigma^2}\right)$$

■ 尤度関数

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(Y_i,a,b)$$
$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-aX_i-b)^2\right)$$

二乗誤差

$$\log L(a,b)=-\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\boxed{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-aX_i-b)^2}$$

対数尤度 $\log L(a,b)$ の最大化 = 二乗誤差の最小化



# 回帰係数の最尤推定

■ 最尤推定

$$(\hat{a},\hat{b})=\arg\max_{a,b}\log L(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\log L(a,b)=-\sum_{i=1}^{n}X_iY_i+b\sum_{i=1}^{n}X_i+a\sum_{i=1}^{n}X_i^2=0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\log L(a,b)=-\sum_{i=1}^{n}Y_i+nb+a\sum_{i=1}^{n}X_i=0$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \Longrightarrow \quad \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

$$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2} \qquad \hat{b}=\bar{Y}-\hat{a}\bar{X}$$



# 不偏分散と不偏共分散

■ 回帰係数の最尤推定量

$$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\frac{\hat{S}_{XY}}{\hat{S}_X^2}$$

■ 不偏分散と不偏共分散

不偏分散

$$\hat{S}_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

不偏共分散

$$\hat{S}_{XY}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$$



# 共分散と相関

■ 共分散

2つの変量 $X$ と $Y$ の相関関係を調べる指標

$$\hat{S}_{XY}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$$

■ 相関係数

共分散を $X$ と $Y$ の標準偏差で正規化 $\longrightarrow$ $|\hat{\rho}|\le 1$

$$\hat{\rho}=\frac{\hat{S}_{XY}}{\hat{S}_X\hat{S}_Y} \xrightarrow{n\to\infty} \rho=\frac{E((X-m_X)(Y-m_Y))}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

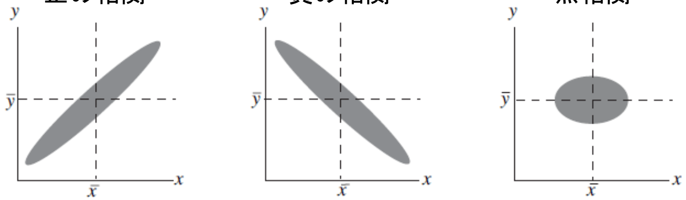
# 相関係数

■ 相関係数

$$\rho = \frac{E\big((X-m_X)(Y-m_Y)\big)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \qquad -1 \le \rho \le 1$$

■ 散布図と相関係数

$\rho \cong 1$ 正の相関　　$\rho \cong -1$ 負の相関　　$\rho = 0$ 無相関






# 自己相関

■ 自己共分散

確率過程　$Y(t) = \theta(t) + \varepsilon$　に対して

$$S_{t_1t_2} = E\big((Y(t_1) - \theta(t_1))(Y(t_2) - \theta(t_2))\big)$$

■ 自己相関

$$\rho_{t_1t_2} = \frac{S_{t_1t_2}}{S_{t_1}S_{t_2}} = \frac{S_{t_1t_2}}{\sigma^2} \qquad -1 \le \rho_{t_1t_2} \le 1$$



# 定常過程

■ 定常過程

平均値が時間によらず一定:　$E(Y(t)) = \theta(t) = \theta$

共分散が時間差のみの関数:　$\rho_{t_1t_2} = \dfrac{S_{t_1t_2}}{\sigma^2} = \dfrac{S_{\Delta t}}{\sigma^2}$　　$\Delta t = t_2 - t_1$

⇩

$Y(t)$ は定常過程　⟶　確率（集合）平均と時間平均が一致

例:　サイコロ　→　細工をしない限り定常
ルーレット　→　ディーラーが交代しない限り定常
雑音　→　温度が変化しない限り定常

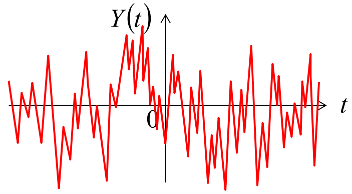


# 雑音

■ 平均、分散

$$E(Y(t)) = 0$$

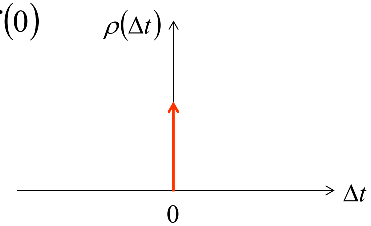
$$V(Y(t)) = E(Y^2(t)) = \sigma^2$$




■ 共分散、自己相関

$$S(\Delta t) = E(Y(t)Y(t+\Delta t)) = \sigma^2\delta(0)$$

$$\rho(\Delta t) = \frac{S(\Delta t)}{V(Y(t))} = \delta(0)$$



# ランダムパルス

- ランダムパルス

$$Y(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} m_i \,\mathrm{rect}(t-iT)$$

矩形パルス関数

$$m_i : +A \ \text{or}\ -A$$

- 平均、分散

$$E(Y(t))=0$$

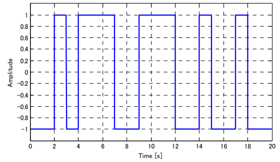
$$V(Y(t))=E(Y^2(t))=A^2$$

- 共分散、自己相関

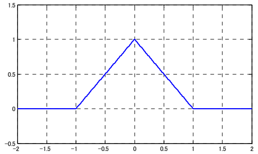
$$S(\Delta t)=\begin{cases} A^2(1-|\Delta t|/T) & |\Delta t|<T \\ 0 & |\Delta t|\ge T \end{cases}$$

$$\rho(\Delta t)=\frac{S(\Delta t)}{V(Y(t))}$$

$Y(t)$



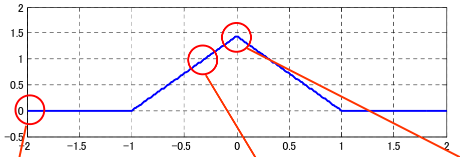

$\rho(\Delta t)$



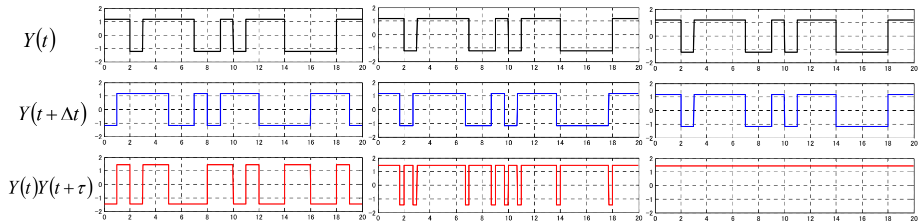


# ランダムパルス信号（自己相関）

$S(\Delta t)=\mathrm{E}[Y(t)Y(t+\Delta t)]$



$|\Delta t|=2T$ $|\Delta t|=0.3T$ $|\Delta t|=0$






# まとめ

- 多変量統計学

$$Y_i(X)=\theta(X)+\varepsilon_i$$

$X=t$ のとき $\longrightarrow$ 確率過程

- 回帰直線

$$\theta(x)=ax+b$$

$$\hat{a}=\frac{\hat{S}_{XY}}{\hat{S}_X^2} \qquad \hat{b}=\overline{Y}-\hat{a}\overline{X}$$

- 共分散と相関係数

$$\hat{S}_{XY}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y}) \qquad \hat{S}_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\hat{\rho}=\frac{\hat{S}_{XY}}{\hat{S}_X\hat{S}_Y}$$