問 1

クラメール・ラオの不等式について説明して、証明せよ。

解答

教科書 p.137 定理 11.3 に参照。

但し、コーシー・シュワルツ不等式が次の方が正しい。

$$\int\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\prod_i f\left(x_i,\theta\right)dx_i\times\int\left(\sum_i\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\left(x_i,\theta\right)\right)^2\prod_i f\left(x_i,\theta\right)dx_i$$
$$\geq\left(\int\left(\hat{\theta}-\theta\right)\left(\sum_i\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\left(x_i,\theta\right)\right)\prod_i f\left(x_i,\theta\right)dx_i\right)^2$$
$$=1$$

以上

問 2

確率モデル

$$X=\theta+\varepsilon$$

において、誤差εの分布が

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{2}\exp\left(-|\varepsilon|\right)$$

で表される両側指数分布に従うとする。n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が得られるとき、下の手順でθ の最尤推定量を計算せよ。

(a) θ の対数尤度関数を書け。

(b) n は偶数とするとき、θ の最尤推定量の範囲を求めよ。

(c) n は奇数とするとき、θ の最尤推定量の範囲を求めよ。

(d) 教科書の p.105、p.106 で最もθ の最尤推定量に相応しい推定量（平均方法）を決めて、その理由を書け。

解答

(a) 定義から、θ の対数尤度関数は

$$LL(\theta)=\frac{1}{n}\log L(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log f\left(X_i,\theta\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{1}{2}\exp\left(-\left|X_i-\theta\right|\right)\right)$$
$$=-\log 2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\theta\right|$$

θ の最尤推定量を求めるために、対数尤度関数をθ に対して偏微分することになるので、まず次の偏微分を考える。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left|X_i-\theta\right|=\begin{cases}1 & ,\theta>X_i\\ -1 & ,\theta<X_i\end{cases}$$

そして、対数尤度関数をθに対して偏微分したら

$$\frac{\partial}{\partial\theta}LL(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\log 2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\theta\right|\right)$$
$$=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\left|X_i-\theta\right|$$

上の式の結果、θ より大きい観測値の数が多い場合は正になって、θ より小さい観測値の数が多い場合は負になる。解析するため、X_i を小さい順に並べ直す。

(b) n は偶数のとき、θ より大きい観測値とより小さい観測値の数が同じな場合だけは偏微分値が 0 になる。その時のθ の範囲は $X_{\frac{n}{2}}<\theta<X_{\frac{n}{2}+1}$。

(c) n は奇数のとき、θ より大きい観測値の数が一つ多い場合、偏微分値が 1 になる。そしてθ より小さい観測値の数が一つ多い場合、偏微分値が－1 になる。対数尤度関数が最大になるどころは傾きが正から負になるところで、すなわち、ちょうど $\theta=X_{\frac{n+1}{2}}$ の時である。

(d) 以上の結果から、中央値は最も相応しい推定量である。

n は偶数のとき $X_{\frac{n}{2}}<\left[\theta=\left(X_{\frac{n}{2}}+X_{\frac{n}{2}+1}\right)/2\right]<X_{\frac{n}{2}+1}$、そして、$n$ は奇数のとき、$\theta=X_{\frac{n+1}{2}}$ である。

以上

補題 1　χ^2-分布：n 個の標準正規分布に従う確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の二乗和 $X=Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2$ の分布を自由度 n の χ^2-分布といい、その確率密度関数

$$f_X(x)=\frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}\qquad ,x\geq 0$$

と表され、但し$\Gamma(s)$ はΓ 関数で、

$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$　と定義される。

証明：

仮定から、Y の確率密度関数は

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

次、$Z=Y^2$ の確率密度関数を求める。

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(z-y^2\right)f_Y(y)dy=\left[f_Y\left(\sqrt{z}\right)+f_Y\left(-\sqrt{z}\right)\right]/2\sqrt{z}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\qquad ,z\geq 0$$

(裏へ続く)

そして Z の特性関数は

$$\varphi_Z(t)=\int_0^\infty e^{itz} f_Z(z)dz=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\exp\left(-\frac{(1-2it)z}{2}\right)dz$$
$$=\left[\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi z'}}\exp\left(-\frac{z'}{2}\right)dz'\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-2it)}}$$
$$=(1-2it)^{-1/2}$$

但し、$z'=(1-2it)z$ で、括弧の中の積分は、確率密度関数の定義により 1 になる。Y が互いに独立で、すなわち Z も互いに独立である。特性関数と独立性の関係により、X の特性関数は $\varphi_X(t)=(1-2it)^{-n/2}$ になる。

$\varphi_X(t)$ に対して逆フーリエ変換すれば、X の確率密度関数が求められる。すなわち

$$f_X(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{itx}\varphi_X(t)dt=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{itx}}{(1-2it)^{n/2}}dt$$

しかし、複素関数の積分は今の段階では難しいであろう。今回は χ^2-分布から、特性関数を計算して、確認しよう。

$$\varphi_{\chi^2}(t)=\int_0^\infty e^{itx} f_X(x)dx=\int_0^\infty e^{itx}\frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}dx$$
$$=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{(1-2it)x}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\cdot\frac{2^{n/2}}{(1-2it)^{n/2}}\int_0^\infty x'^{\frac{n}{2}-1}e^{-x'}dx'$$
$$=(1-2it)^{-n/2}$$

X の特性関数と一致した。但し $x'=(1-2it)x/2$ で、最後の積分は Γ 関数の定義から、$\Gamma(n/2)$ になる。

以上

補題 2　t-分布 : 標準正規分布に従う確率変数 Y と自由度 n の χ^2-分布に従う確率変数 Z を用いて

$$X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

の分布を自由度 n の t-分布といい、その確率密度関数

$$f_X(x)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$$

と表され。

証明：

確率変数の比の確率分布を求める場合、まず分母の確率変数を固定して、条件付き確率分布を求める。

$$f_{X|Z}(x|z)=\sqrt{z/n}\,f_Y\left(\sqrt{z/n}\cdot x\right)=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi n}}\exp\left(-\frac{zx^2}{2n}\right)$$

そして、X の確率密度関数を次のように求める。

$$f_X(x)=\int_0^\infty f_{X,Z}(x,z)dz=\int_0^\infty f_{X|Z}(x|z)f_Z(z)dz$$
$$=\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\cdot\Gamma(n/2)}\int_0^\infty z^{(n-1)/2}\exp\left(-\frac{(x^2+n)z}{2n}\right)dz$$
$$=\frac{1}{2^{(n+1)/2}\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma(n/2)}\left(\frac{2n}{x^2+n}\right)^{(n+1)/2}\int_0^\infty z'^{(n-1)/2}e^{-z'}dz'$$
$$=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$$

但し $z'=(x^2+n)z/2n$ で、最後の積分は Γ 関数の定義から、$\Gamma((n+1)/2)$ になる。そして $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

以上

補題 3　F-分布 : 自由度 m の χ^2-分布に従う確率変数 Y と自由度 n の χ^2-分布に従う確率変数 Z を用いて

$$X=\frac{Y/m}{Z/n}$$

の分布を自由度（m, n）の F-分布といい、その確率密度関数

$$f_X(x)=\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{(m+n)}{2}},\ x\ge 0$$

と表され。

証明：

補題 2 と同じ、まず分母の確率変数を固定して、条件付き確率分布を求める。

$$f_{X|Z}(x|z)=\frac{mz}{n}f_Y\left(\frac{mz}{n}\cdot x\right)=\left(\frac{mz}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{m/2-1}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\exp\left(-\frac{mzx}{2n}\right)$$

そして、X の確率密度関数を次のように求める。

$$f_X(x)=\int_0^\infty f_{X,Z}(x,z)dz=\int_0^\infty f_{X|Z}(x|z)f_Z(z)dz$$
$$=\frac{x^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cdot$$
$$\int_0^\infty z^{(m+n)/2-1}\exp\left(-\frac{(mx+n)z}{2n}\right)dz$$
$$=\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{(m+n)}{2}}$$

最後の部分は自分で確認してみよう。

以上