問 1

確率モデル

$$X=\theta+\varepsilon$$

において、誤差εの分布が平均 0、分散σ^2の正規分布に従うとする。そのとき、独立な観測値$X_1, X_2, \cdots, X_n$に対して未知の母数θのピットマン推定量$\hat{\theta}^*$を求めよ。

解答

誤差εの分布が平均 0、分散σ^2の正規分布に従うので

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

そして

$$\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2-2\sum_{i=1}^n X_i\theta+\sum_{i=1}^n\theta^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\theta^2-2\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i/n\right)+\sum_{i=1}^n X_i^2/n}{2\sigma^2/n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n X_i^2/n\right)-\overline{X}^2}{2\sigma^2/n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right)\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2/n}\right)$$

但し

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n \quad そして \quad \beta=\left(\sum_{i=1}^n X_i^2/n\right)-\overline{X}^2$$

定義よりθのピットマン推定量は

$$\hat{\theta}^*=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right)\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2/n}\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right)\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2/n}\right)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}}\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2/n}\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}}\exp\left(-\frac{\left(\theta-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2/n}\right)d\theta}=\overline{X}$$

積分の中の式は平均$\overline{X}$分散σ^2/nの正規分布の形になったから、積分を簡単に求められる。

従って誤差の分布が正規分布だったら、そのピットマン推定量は観測値の標本平均になる。

以上

問 2

確率モデル

$$X=\theta+\varepsilon$$

において、n 個の独立な観測値$X_1, X_2, \cdots, X_n$が得られるとき、分散の不偏な推定量である不偏分散が

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

になることを証明せよ。ただし誤差εの分散が未知として、$\bar{X}$が観測値の標本平均とする。

解答

まず誤差εの分散をσ^2と定義する。

$$\sigma^2=V(\varepsilon)=V(X)$$

標本平均の分散はX_iの独立性より

$$V\left(\bar{X}\right)=E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\theta\right)^2\right)=E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\theta\right)^2\right)=\frac{V(X)}{n}$$

従って

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)$$
$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^n\left[\left(X_i-\theta\right)-\left(\bar{X}-\theta\right)\right]^2\right)$$
$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n\left[E\left(\left(X_i-\theta\right)^2\right)-E\left(\left(\bar{X}-\theta\right)^2\right)\right]\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}\left[nV(X)-nV\left(\bar{X}\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-\sigma^2\right]=\sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$の不偏性は明らかである。

直観的には、分散の最もよい推定量は標本分散のように思えるが、分母が n ではなく(n－1)としないと不偏とならないことに注意する。

以上