

2011年後期 応用確率統計

⑨ 平均と分散の不偏推定

河野 行雄

kawano@pe.titech.ac.jp

2012年12月6日

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

1

復習

■ 推定量と推定値

推定量: $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 推定値: $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$

■ 不偏性

$$E(\hat{\theta} | \theta) = E^{X_1, \dots, X_n}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) | \theta) = \theta$$

■ 標本平均と幾何平均

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{不偏}$$

$$\hat{\theta} = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \quad \Rightarrow \quad \text{不偏ではない}$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

2

平均値の不偏推定

■ 観測データ

例: $X_i = \theta + \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n)$

確率変数 未知母数 誤差

誤差の分布: $f(\varepsilon_i)$ 平均: $E(\varepsilon_i) = 0$ 分散: $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

■ 最適な推定量

不偏: $E(\hat{\theta} | \theta) = E^{X_1, \dots, X_n}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) | \theta) = \theta$

分散最小: $\hat{\theta}^* = \arg \min_{\hat{\theta}} V(\hat{\theta} | \theta)$

誤差の分布:
 → 未知: $\hat{\theta}^* =$ 標本平均
 → 既知: $\hat{\theta}^* =$ ピットマン推定量

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

3

標本平均

■ 標本平均

誤差の分布未知のときの最小分散推定量

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

■ 不偏性

$$E(\hat{\theta}^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \theta$$

■ 最小分散

分散がクラメル・ラオの下限に一致: $V(\hat{\theta}^*) = 1/nI$

クラメル・ラオの不等式

$$V(\hat{\theta}) \geq 1/nI \quad I = E \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta) \right)^2 \right)$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

4

標本平均の分散

■ 標本平均

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

■ 標本平均の分散

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}^*) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = E\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

5

クラメル・ラオの下限

■ クラメル・ラオの不等式

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI} \quad I = E\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta)\right)^2\right)$$

■ 誤差が正規分布のとき

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log f(x, \theta) = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{nI} = \frac{\sigma^2}{n} = V(\hat{\theta}^*)$$

$$E\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta)\right)^2\right) = E\left(\frac{(X-\theta)^2}{\sigma^4}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

6

一貫性

■ 一致推定量

観測数を増やすと推定量が未知母数に一致(確率収束)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}^* - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

■ 標本平均

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(\hat{\theta}^*) = \theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

→ チェビシェフの不等式(大数の法則)から一致推定量

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

7

標本分散

■ 標本分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

■ 不偏性

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n ((X_i - \theta) - (\bar{X} - \theta))^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 - 2\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)(\bar{X} - \theta) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \theta)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 - n(\bar{X} - \theta)^2\right) = nV(X) - nV(\bar{X}) \\ &= n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2 \quad \rightarrow \quad \text{不偏ではない} \end{aligned}$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

8

不偏分散

■ 標本分散

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

■ 不偏分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n-1} \sigma^2 = \sigma^2$$

← 観測値一つ分に相当する情報を平均に使ったため

位置共変推定量

■ 位置共変推定量

$$\hat{\theta}(X_1 + c, \dots, X_n + c) = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) + c$$

→ 例えば標本平均

■ 変数変換

$$\text{例: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y_1 = X_2 - X_1, \dots, Y_{n-1} = X_n - X_1$$

■ 標本平均の補正

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} - E_0(\bar{X} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$$

→ $V(\hat{\theta}^*) \leq V(\hat{\theta})$ 誤差の分布が既知であれば分散を削減可能

ピットマン推定量

■ 標本平均

誤差の分布既知のときの最小分散位置共変推定量

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} - E_0(\bar{X} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

$$= \int \theta g(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n) d\theta$$

■ 尤度関数

観測値の同時確率密度関数

$$g(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i - \theta)}{\int \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}$$

ピットマン推定量の例

■ 観測データ

$$X = \theta + \varepsilon \quad f(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & |\varepsilon| \leq 0.5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

■ 尤度関数

$$\prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \theta \leq \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha &= \max_i X_i - 0.5 \\ \beta &= \min_i X_i + 0.5 \end{aligned}$$

■ ピットマン推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} d\theta} = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\max X_i + \min X_i)$$

ピットマン推定量の例

■ 標本平均

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{12n} \rightarrow \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48} \quad \leftarrow \quad \sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

■ ピットマン推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{2}(\max X_i + \min X_i) = \frac{1}{2}(a + b) \quad \begin{array}{l} a = \min_i X_i \\ b = \max_i X_i \end{array}$$

$$V(\hat{\theta}^*) = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^b \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 n(n-1)(b-a)^{n-2} da db$$

$$= \frac{1}{2(n+2)(n+1)} \rightarrow \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}$$

(n-2)個の観測値が
区間[a,b]にある確率

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

13

まとめ

■ 誤差分布未知のときの最小分散推定量

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

■ 誤差分布既知のときの最小分散位置共変推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{\int \theta \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}{\int \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}$$

■ 不偏分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2012年12月6日

平均と分散の不偏推定

14