

問 1

二つのコインを投げる実験をするとして。

事象 A は二つのコインの中で 少なくとも一つが表が出る場合で、

事象 B は二つのコインの出る面が同じ場合である。

(a) 事象 A と事象 B の確率を求めなさい。(5)

(b) $P(A|B)$ と $P(B|A)$ を求めなさい。(10)

(c) 二つの事象は独立か？(10)

問 2 デジタル通信の例 1

送信側で送る情報が 0 の事象を A_0 で、送る情報が 1 の

事象を A_1 で表わして、受信側で 0 と判断する事象を B_0

で、1 と判断する事象を B_1 に表わそう。送信側でデータ

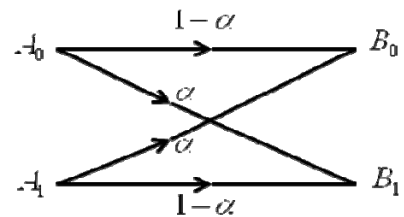
が 0 の確率と 1 の確率がそれぞれ $P(A_0) = p_0 = 0.8$ と

$P(A_1) = p_1 = 1 - p_0 = 0.2$ とあらかじめ仮定する。送信

機で 0 を送ったが受信機が 1 と誤って判断する確率が $\alpha = 0.1$ であり、反対に 1 を送ったが受信機が 0 と誤って判断する確率も等しく $\alpha = 0.1$ だと仮定する。

(a) 受信機が送信した信号を誤って判断する確率を求めなさい。(10)

(b) 受信側で信号を 1 で判断したとき、実際に送信側で 1 を送った確率を求めなさい。(20)



問 3 デジタル通信の例 2

送信信号が X , 受信信号が Y , そして雑音 N を持つ図のようなシステムがある。

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

平均: 0, 分散: σ^2

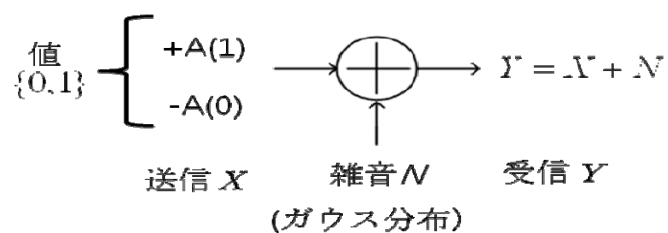
(X と N は独立)

(a) $x = +A$ のとき平均と分散を求めよ。(10)

(b) $P(y|x = +A)$ の確率密度関数を求めよ。このとき X は既に A という決定された値である点に留意しなさい。(10)

(c) $P(y|x = +A)$ と $P(y|x = -A)$ のグラフの概形を同一平面上に描きなさい。(10)

(d) 受信した信号 y が正の値であったとき送信した信号 X は $\pm A$ どちらと判断するのが合理的かを述べよ。(15)



問 1

二つのコインを投げる実験をしましょう。

事象 A は二つのコインの中で 少なくとも一つが表が出る場合で、事象 B は二つのコインの出る面が同じ場合である。

- (a) 事象 A と事象 B の確率を求めなさい。(5)
 (b) $P(A|B)$ と $P(B|A)$ を求めなさい。(10)
 (c) 二つの事象は独立か?(10)

問 2 デジタル通信の例 1

送信側で送る情報が 0 の事象を A_0 で、送る情報が 1 の事象を A_1 で現わして、受信側で 0 と判断する事象を B_0 で、1 と判断する事象を B_1 に現わそう。送信側でデータが 0 の確率と 1 の確率がそれぞれ $P(A_0) = p_0 = 0.8$ と $P(A_1) = p_1 = 1 - p_0 = 0.2$ とあらかじめ仮定する。送信機で 0 を送ったが受信機が 1 と誤って判断する確率が $\alpha = 0.1$ であり、反対に 1 を送ったが受信機が 0 と誤って判断する確率も等しく $\alpha = 0.1$ だと仮定する。

- (a) 受信機が送信した信号を誤って判断する確率を求めなさい。(10)
 (b) 受信側で信号を 1 で判断したとき、実際に送信側で 1 を送った確率を求めなさい。(20)

解答

$$(a) P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(b) P(B|A) = \frac{p(A, B)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{p(A, B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \frac{1}{4} = P(A, B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

したかって、独立ではない。

以上

解答

与えられた通信チャネルの特性は次のように条件付き確率として表現される。

$$P(B_1|A_0) = P(B_0|A_1) = \alpha = 0.1$$

$$P(B_0|A_0) = P(B_1|A_1) = 1 - \alpha = 0.9$$

- (a) 受信機の誤り確率

$$\begin{aligned} P(\text{error}) &= P(A_0, B_1) + P(A_1, B_0) \\ &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) \\ &= \alpha \cdot p_0 + \alpha \cdot p_1 = \alpha = 0.1 \end{aligned}$$

$$(b) P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{P(B)} = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{\sum_{n=1}^n P(B|A_n)P(A_n)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_1|B_1) &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0)} \\ &= \frac{(1-\alpha)p_1}{(1-\alpha)p_1 + \alpha p_0} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.9 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = 0.69 \end{aligned}$$

以上

問3 デジタル通信の例2

送信信号が X , 受信信号が Y , そして雑音 N を持つ図のようなシステムがある。

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{平均:0, 分散:}\sigma^2$$

(X と N は独立)

(a) $x = +A$ のとき平均と分散を求めよ。(10)

(b) $P(y|x = +A)$ の確率密度関数を求めよ。このとき X は既に A という決定された値である点に留意しなさい。(10)

(c) $P(y|x = +A)$ と $P(y|x = -A)$ のグラフの概形を同一平面上に描きなさい。(10)

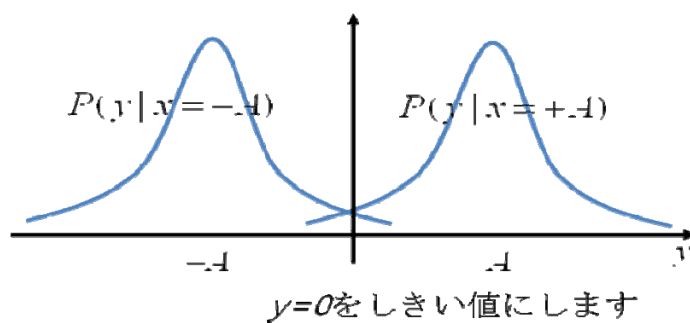
(d) 受信した信号 y が正の値であったとき送信した信号 X は $\pm A$ どちらと判断するのが合理的かを述べよ。(15)

解答

(a) 平均: $+A$ 分散: σ^2

$$(b) P(y|x = +A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(c)



(d)

受信 $P(y|+A) \cdot P(y|-A)$

$$\rightarrow P(+A|y) \cdot P(-A|y)$$

$$\frac{P(+A|y)}{P(-A|y)} = \frac{P(y|+A) \cdot \frac{P(+A)}{P(y)}}{P(y|-A) \cdot \frac{P(-A)}{P(y)}} \quad \text{ここで、} P(+A) = P(-A)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}\right)} = \exp\left(-\frac{(y-A)^2 - (y+A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{4yA}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(\frac{2yA}{\sigma^2}\right)$$

If $P(+A|y) > P(-A|y)$, then $X = +A(1)$ と判定

$$\left[\exp\left(\frac{2Ay}{\sigma^2}\right) > 1 \Rightarrow \frac{2Ay}{\sigma^2} > 0 \Rightarrow y > 0 \right]$$

以上