第6回 中心極限定理

荒木 純道
20121108

算術平均

算術平均

確率変数Xの平均$\mathbb{E}[X]$を知りたいとき、独立な試行を繰り返し実現値の算術平均を求める意味は？

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

ただし、$X_1, \ldots, X_n$はXと同じ確率分布に従う独立な確率変数

定理

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X],\ V[Y_n] = \frac{V[X]}{n}$$

証明

期待値

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]}{n} \\ &= \frac{n\mathbb{E}[X]}{n} \\ &= \mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

分散

$m = \mathbb{E}[Y_n]$

$$\begin{aligned}V[Y_n] &= \mathbb{E}[(Y_n - m)^2] \\ &= E\left[\left(\frac{X_1 - m + \cdots + X_n - m}{n}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[\{(X_1 - m) + \cdots + (X_n - m)\}^2] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[(X_1 - m)^2 + \cdots + (X_n - m)^2] \\ &= \frac{1}{n^2}nV[X] = \frac{V[X]}{n}\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_n$は互いに独立

大数の法則

大数の(弱)法則

言い換え

$n \to \infty$のとき、$Y_n \to m$

概収束する場合は大数の(強)法則と呼ぶ

確率変数Y_nがmに「確率収束」する。即ち、任意の$\epsilon > 0$について

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - m| > \epsilon) = 0$$

証明

まず、以下のように期待値と分散の文字を定義しておく

$$\mathbb{E}[Y_n] = m, \quad \mathbb{E}[X] = m$$

$$V[Y_n] = \frac{\sigma^2}{n}, \quad V[X] = \sigma^2$$

チェビシェフ不等式より、任意の$t(>0)$に対して次式が成立

$$P(|Y_n - m| \geq t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{t^2}$$

$t\sigma/\sqrt{n} = \epsilon$とおけば、任意の$\epsilon(>0)$に対し

$$P(|Y_n - m| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - m| > \epsilon) = 0 \quad \square$$

中心極限定理

Y_nの挙動

$X_1, \ldots, X_n$は平均m、分散σ^2の同じ確率分布に従う独立な確率変数であるとき、新しい確率変数

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

はどのような形でmに近づくのか

中心極限定理

$\mathbb{E}[Y_n] = m$
$V[Y_n] = \sigma^2/n$

Y_nを標準化すると

$$Z_n = \frac{Y_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}$$

とおくと、nによらず$\mathbb{E}[Z_n] = 0, V[Z_n] = 1$である。このとき

$n \to \infty$のとき、$Z_n \to N(0,1)$

確率変数Z_nが標準正規分布に「法則収束」する

証明

標準化された(平均0、分散1)の確率変数

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i - m}{\sigma},\ i = 1, \cdots, n$$

の特性関数はiによらず同一。それを$\phi(t)$とする。$\tilde{X}_i$の独立性より、Z_nの特性関数$\phi_n(t)$は

$$\phi_n(t) = \left[\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

また、平均と分散が既知であるため、2次モーメントまでの値は以下のようになる。$\phi(0) = 1, \phi'(0) = 0, \phi''(0) = -1$

このため、$\phi(t)$をマクローリン展開すると

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{\phi''(0)}{2}t^2 + \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3)\end{aligned}$$

このため、Z_nの特性関数は以下のように変形できる

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}O(t^3)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n}\frac{t^2}{2}\{1 - \frac{2}{\sqrt{n}}O(t^3)\}\right]^n \\ &\to e^{-\frac{t^2}{2}}\ (n \to \infty) \quad \square\end{aligned}$$

概して、"独立で同一な分布に従う多数の確率変数の和は、ほぼ正規分布に従う"と言える