

問 1

以下の指数分布の特性関数を求めよ。導出の流れを記載すること【30】

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$$

問 2

確率変数 X, Y は独立で、それぞれ平均 0 分散 σ_X^2 と平均 0 分散 σ_Y^2 の正規分布に従うとき、以下の問に答えよ

- (a) 平均 0 分散 σ^2 の正規分布の特性関数を求めよ【20】
- (b) 新たな確率変数を $Z = X + Y$ と定義したとき、独立という性質と (a) で求めた特性関数を用いて確率変数 Z の特性関数を求めよ【15】
- (c) 確率変数 Z の確率密度関数を求めよ【10】

問 3

講義中では標準正規分布から特性関数を求め、モーメントの算出を行ったが、逆にモーメントから特性関数を求め、その特性関数から何らかの確率密度関数を求めるということを考える。

$0 < x < \infty$ で定義される確率密度関数 $p(x)$ が以下のような n 次モーメントを持っているとしたとき、次の問いに答えよ

$$E[X^n] = n! (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- (a) n 次モーメントより特性関数の n 回微分したときの $t=0$ における値を算出できる。このことを踏まえて、特性関数 $\phi(t)$ をマクローリン展開した式を和を含んだ形で表せ。ただし、マクローリン展開の式は以下のように与えられる【10】

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- (b) 無限等比級数の和の公式は以下のように与えられる。この式を用いて、特性関数 $\phi(t)$ を和を含まない形で表せ【10】

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

- (c) (b) で得られた特性関数からこの確率密度関数がどのような分布に従うか答えよ【5】

問 1

以下の指数分布の特性関数を求めよ。導出の流れを記載すること【30】

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$$

解答

特性関数の定義より

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{(-\lambda + it)x} dx \\ &= \lambda \left[e^{(-\lambda + it)x} / (-\lambda + it) \right]_{x=0}^{\infty} \\ &= 1/(1 - it\lambda^{-1})\end{aligned}$$

以上

問 2

確率変数 X, Y は独立で、それぞれ平均 0 分散 σ_X^2 と平均 0 分散 σ_Y^2 の正規分布に従うとき、以下の問に答えよ

- (a) 平均 0 分散 σ^2 の正規分布の特性関数を求めよ【20】
 (b) 新たな確率変数を $Z = X + Y$ と定義したとき、独立という性質と (a) で求めた特性関数を用いて確率変数 Z の特性関数を求めよ【15】
 (c) 確率変数 Z の確率密度関数を求めよ【10】

解答

- (a) 特性関数の定義と全確率 1 より

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{itx} dx \\ &= e^{-\sigma^2 t^2 / 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it\sigma)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{-\sigma^2 t^2 / 2}\end{aligned}$$

- (b) 確率変数が独立であるため、新しい確率変数 Z の確率密度関数を定義より求めると畳み込み積分が現れる。畳み込み積分をフーリエ変換やラプラス

変換すると、個別のフーリエ・ラプラス変換の変換後の式の掛け算となる。

このため、確率変数 Z の特性関数は

$$\begin{aligned}\phi_Z(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) \\ &= e^{-(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2 / 2}\end{aligned}$$

- (c) (b) の特性関数の形から確率変数 Z は平均 0 分散 $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ の正規分布に従うため

$$p_Z(z) = \frac{\exp(-z^2 / 2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2))}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}}$$

以上

問 3

講義中では標準正規分布から特性関数を求め、モーメントの算出を行ったが、逆にモーメントから特性関数を求め、その特性関数から何らかの確率密度関数を求めるということを考える。

$0 < x < \infty$ で定義される確率密度関数 $p(x)$ が以下のような n 次モーメントを持っているとしたとき、次の問いに答えよ

$$E[X^n] = n!(n = 0, 1, 2, \dots)$$

- (a) n 次モーメントより特性関数の n 回微分したときの $t=0$ における値を算出できる。このことを踏まえて、特性関数 $\phi(t)$ をマクローリン展開した式を和を含んだ形で表せ。ただし、マクローリン展開の式は以下のように与えられる【10】

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- (b) 無限等比級数の和の公式は以下のように与えられる。この式を用いて、特性関数 $\phi(t)$ を和を含まない形で表せ【10】

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

- (c) (b) で得られた特性関数からこの確率密度関数がどのような分布に従うか答えよ【5】

解答

- (a) 特性関数の n 回微分した際の $t=0$ における値と n 次モーメントには以下のような関係がある

$$i^n E[X^n] = \phi^{(n)}(0)$$

このため、 $\phi^{(n)}(0) = i^n n!$ となるため、特性関数は以下のように表すことができる

$$\phi^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n!}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n$$

- (b) 無限等比級数の式と(a)で求めた式を比較すると $a=1, r=it$ を代入すればよく、特性関数は次のように表すことができる

$$\phi^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n = \frac{1}{1-it}$$

- (c) 問 1 で求めた指数分布の特性関数と同一の形で $\lambda=1$ のときに相当し、以下のような確率密度関数であったことがわかる

$$p(x) = e^{-x} (x \geq 0)$$

以上