応用確率統計（演習 4） 平成 24 年 10 月 25 日

問 1

ある試験の平均点が 50 点で、分散が 25 であるという。分布の形が対称であると仮定した場合において次の問に答えよ

(a) 60 点以下の人は全体の何パーセント以上か【20】

(b) 分布が正規分布だと仮定した場合、標準化を行い、60 点以下の人が全体の何パーセントかを以下の標準正規分布表を用いて求めよ【15】

・標準正規分布の累積分布と値は次式と表を参照せよ。

$$P\left(x<z\right)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$P(x<z)$	0.500	0.599	0.692	0.773	0.841	0.894	0.933	0.960	0.977	1
z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	＞4

問 2

正 12 面体で 1,2,...,12 の乱数を発生させることにする。この乱数の期待値と分散を求めよ。【25】

問 3

確率変数 X が下の確率密度関数に従うとする。

$$p_X(x)=e^{-x}(x\geq 0)$$

このとき、次の問題に答えよ。

(a) 確率変数 X の期待値を求めよ【10】

(b) 新たな確率変数 Y を次式で定義する【15】

$$Y=\ln(1+X)$$

このとき、確率変数 Y の期待値を次式を用いて表せ

$$Ei(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

必要であれば以下の式を用いよ

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+x)e^{-x}=0$$

(c) $Ei(1)$ はいくら以下になるかを求めよ【15】

問 1

ある試験の平均点が 50 点で、分散が 25 であるという。分布の形が対称であると仮定した場合において次の問に答えよ

(a) 60 点以下の人は全体の何パーセント以上か【20】

(b) 分布が正規分布だと仮定した場合、標準化を行い、60 点以下の人が全体の何パーセントかを以下の標準正規分布表を用いて求めよ【15】

解答

(a) チェビシェフ不等式より

$$P(|X-50|\geq 5t)\leq 1/t^2$$

$$P(|X-50|\geq 10)\leq 1/4$$

分布の対称性と全確率 1 により

$$2P(X-50\geq 10)\leq 1/4$$

$$P(X\geq 60)\leq 1/8$$

$$1-P(X\leq 60)\leq 1/8$$

$$P(X\leq 60)\geq 7/8$$

(b) 標準化により

$$Y=(X-50)/5$$

$$P(X\leq 60)=P(Y\leq 2)$$

となるため、標準正規分布表より

$$\therefore P(Y\leq 2)=0.977$$

以上

問 2

正 12 面体で 1,2,…,12 の乱数を発生させることにする。この乱数の期待値と分散を求めよ。【25】

解答

この乱数は一様分布に従うため

$$\overline{X}=\sum_{k=1}^{12}k\cdot 1/12=13/2$$

$$\overline{(X-\overline{X})^2}=\sum_{k=1}^{12}(k-13/2)^2\cdot 1/12=\sum_{k=1}^{12}k^2\cdot 1/12-(13/2)^2$$

$$=13\cdot 25/6-13^2/4=143/12$$

以上

問 3

確率変数 X が下の確率密度関数に従うとする。

$$p_X(x)=e^{-x}(x\geq 0)$$

このとき、次の問題に答えよ

(a) 確率変数 X の期待値を求めよ【10】

(b) 新たな確率変数 Y を次式で定義する【15】

$$Y=\ln(1+X)$$

このとき、確率変数 Y の期待値を次式を用いて表せ

$$Ei(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$$

必要であれば以下の式を用いよ

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+x)e^{-x}=0$$

(c) $Ei(1)$ はいくら以下になるかを求めよ【15】

解答

(a) 平均の定義より

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx=1$$

(b) 平均の定義より

$$\int_0^\infty \ln(1+x)e^{-x}dx=[-\ln(1+x)e^{-x}]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}/(1+x)dx$$

$$=e\int_1^\infty e^{-t}/tdt$$

$$=eEi(1)$$

(c) イェンセン不等式より

$$eEi(1)\leq \ln(1+\overline{X})=\ln(2)$$

$$\therefore Ei(1)\leq \ln(2)/e$$

以上