第4回 特性関数

荒木 純道

20121025

特性関数

特性関数の定義式

確率変数Xの確率密度関数$p(x)$のフーリエ変換のこと

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx,\ i = \sqrt{-1}\end{aligned}$$

特性関数の性質

- 平均や分散が存在しなくても$\phi(t)$は存在
- $\phi(0) = 1$ （∵ 確率分布の定義）
- $|\phi(t)| \le 1$
- $\phi(-t) = \phi^*(t)$ （∵ $p(x)$は実関数）

フーリエ変換

一般化された確率密度関数に対しても、フーリエ変換を拡張することで適用できる

フーリエ変換と逆変換

フーリエ変換

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathcal{F}[p(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx\end{aligned}$$

フーリエ逆変換

$$\begin{aligned}p^*(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\phi(t)] \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-itx}\phi(t)dt\end{aligned}$$

主値積分

フーリエ変換の逆フーリエ変換

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[p(x)]\big] = \frac{p(x+0)+p(x-0)}{2}$$

と、ほぼ元に戻ることが知られている

特性関数とモーメント

特性関数が求まれば、それをn回微分することでn次モーメントが簡単に計算できる

特性関数からモーメントの算出

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx$$

両辺をtでn回微分して$t=0$を代入

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(0) &= \mathbb{E}[(iX)^n e^{i0X}] \\ &= i^n \mathbb{E}[X^n] = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)x\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X^n] = i^{-n}\phi^{(n)}(0)$$

特性関数とモーメント

平均・分散とモーメント

- 平均$\mathbb{E}[X]$は1次モーメント
- 分散$V[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$は1次、2次より求められる

例：標準正規分布のモーメント

$2n$次のモーメント(偶数次。奇数次のモーメントは0)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2n}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[x^{2n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{2n-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= (2n-1)\mathbb{E}[X^{2n-2}],\ n = 1, 2, \ldots \\ \mathbb{E}[X^{2n}] &= (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot \mathbb{E}[X^0] \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

部分積分より

漸化式を解くと

特性関数とモーメント

例：標準正規分布のモーメント

特性関数を用いて求める

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^k k!} = \boxed{1-\frac{t}{2}+\cdots} + (-1)^n\frac{t^{2n}}{2^n n!} + \boxed{\cdots}\end{aligned}$$

テイラー展開 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

2n回微分で定数項に

2n回微分で0

$t = 0$で0

2n回微分して$t = 0$を代入

$$\phi^{(2n)}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

キュムラント母関数

キュムラント母関数の定義式

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \log\left(\mathbb{E}[e^{tX}]\right) \\
&= \log\left(\phi(-it)\right)
\end{aligned}
$$

モーメント母関数
$\psi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$

キュムラント母関数の性質

$k(t)$をn回微分して$t = 0$とおく→ n次キュムラント

- 1次キュムラント$k^{(1)}(0)$は$\mathbb{E}[X] = \psi^{(1)}(0)/\psi(0)$
- 2次キュムラント$k^{(2)}(0)$は$V[X] = \{\psi^{(2)}(0)\psi(0) - \psi^{(1)}(0)\}/\psi(0)^2$

モーメントあるいはキュムラント：確率分布を表すパラメータ

[モーメント問題]：モーメントを与え、pdfを求める

$$
\phi^{(n)}(0) \to \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} t^n \to p(x) = \mathcal{F}^{-1}[\phi(x)]
$$

特性関数と独立性

畳込み積分は掛け算へ

独立な確率変数X, Yの和$Z = X + Y$について

$$
\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad \phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}]
$$

Zの特性関数

$$
\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{itX}e^{itY}] \\
&= \int\int e^{itx}e^{ity} p_X(x)p_Y(y)dxdy \\
&= \int e^{itx}p_X(x)dx \int e^{ity}p_Y(y)dy \\
&= \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] \\
&= \phi_X(x)\cdot\phi_Y(y)
\end{aligned}
$$

畳込みとフーリエ変換の関係が関わる
$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$
（キュムラント母関数では和になる）

独立な確率変数の和は特性関数において積へ
3個以上でも同様である

付録A 代表的分布の特性関数

分布	特性関数
一様分布	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
正規分布	$e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$
コーシー分布	$e^{itm - \sigma\lvert t\rvert}$
指数分布	$\dfrac{1}{1 - it\lambda^{-1}}$
ポアソン分布	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

文字の定義は第２，３回の講義の付録参照