応用確率統計（演習 3）　　平成 24 年 10 月 18 日

問 1

区間[0,1] 上の一様分布に従う確率変数X を考える。

ある確率密度関数*p(x)* が与えられた時、累積分布関数を

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

とする。この関数が逆関数 $x=F^{-1}(y)$ を持つとき、確率変数Y を $Y=F^{-1}(X)$ と定義する。

Y が確率密度関数p(x) に従うことを示せ。

問 2

X、Y が独立で、下の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p(x)=x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\qquad (x\geq 0)$$

このとき、次の Z と W の確率密度関数を求め、簡単に図示せよ。

(a) $Z=X^2$

(b) $W=X^2+Y^2$

問 1

区間[0,1] 上の一様分布に従う確率変数X を考える。ある確率密度関数$p(x)$ が与えられた時、累積分布関数を

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

とする。この関数が逆関数 $x=F^{-1}(y)$ を持つとき、確率変数Y を$Y=F^{-1}(X)$ と定義する。Y が確率密度関数p(x) に従うことを示せ。

解答

Y の累積確率は定義より次のようになる。

$$P(Y\le a)=P(F^{-1}(X)\le a)$$
$$=P(F(F^{-1}(X))\le F(a))$$
$$=P(X\le F(a)) \qquad *P(X\le a)=F(a)=a$$
$$=F(a) \quad =\int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

またYが確率密度関数q(y) に従うとする。Yの累積確率分布は

$$\int_{-\infty}^{a} q(y)dy$$

で与えられる。Y の累積確率分布をa で微分すれば、

$$q(a)=p(a)$$

の関係が得られる。したがってY が確率密度関数$p(x)$ に従うことが示せた。

以上

問 2

X、Y が独立で、下の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p(x)=x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x\ge 0)$$

このとき、次の Z と W の確率密度関数を求め、簡単に図示せよ。

(a) $Z=X^2$

(b) $W=X^2+Y^2$

解答

X、Y の確率密度関数をそれぞれ $p_X(x)$、 $p_Y(x)$ とし、

$$p_X(x)=p_Y(x)=p(x)$$

(a)

$$p_Z(z)=\int_0^{\infty}\delta(z-x^2)p_X(x)dx$$

$$x=\sqrt{z}$$
$$\left|(z-x^2)'\right|=\left|-2x\right|=2\sqrt{z}$$

$$p_Z(z)=\frac{p_X(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right) \qquad (z\ge 0)$$

(b)

$Z_1=X^2$、 $Z_2=Y^2$ とし、(a)の結果から Z_1、 Z_2 の確率密度関数は下のようになる。しかも、X、Y が独立であるから、 Z_1、 Z_2 も独立な確率変数である。

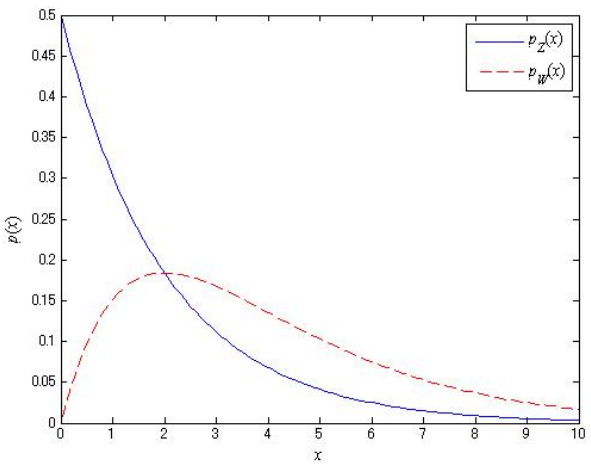
$$p_{Z_1}(z)=p_{Z_2}(z)=p_Z(z)$$

したがって、

$$p_W(w)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\delta(w-z_1-z_2)p_{Z_1}(z_1)p_{Z_2}(z_2)dz_1dz_2$$

$$z_1=w-z_2\ge 0$$
$$w\ge z_2$$

$$p_W(w)=\int_0^{w}p_{Z_1}(w-z_2)p_{Z_2}(z_2)dz_2$$
$$=\int_0^{w}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{(w-z_2)}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z_2}{2}\right)dz_2$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{w}\exp\left(-\frac{w}{2}\right)dz_2=\frac{w}{4}\exp\left(-\frac{w}{2}\right)$$
$$(w\ge 0)$$



以上

補足資料

$g'(x) = dg(x)/dx > 0$ として、x_i を $g(x)$ のゼロ点、ε を十分小さい正数とします。

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx$$

$$= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\left(\frac{dx}{dg}\right)\delta(g)dx$$

$$= \sum_i f(x_i)\left(\frac{dx}{dg}\right)\Bigg|_{x=x_i} = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (\because g' > 0)$$

ここて $g'(x) < 0$ のときは

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx$$

$$= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))(g'(x))^{-1}\delta(g)dg$$

$$= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))(-|g'(x)|)^{-1}\delta(g)dg$$

$$= \sum_i \int_{x_i+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} f(x(g))(|g'(x)|)^{-1}\delta(g)dg = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$