

第3回 平均と分散

荒木 純道
20121018

2012/10/18

応用確率統計 第3回

1

平均と分散

平均とは
分布の中心のこと（重心）

平均の定義式

$\mathbb{R}$ に値をとる確率変数を X 、その確率密度関数を $p_X(x)$ とする
また、 $f(X)$ を新たな確率変数とする

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad \mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx$$

例: $f(x) = \log(1+x)$ とすれば
 $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \log(1+x) p_X(x) dx$

2012/10/18

応用確率統計 第3回

2

平均と分散

標準偏差とは
分布の広がり程度のこと
分散: 標準偏差の2乗

分散の定義式

$\mathbb{R}$ に値をとる確率変数を X 、その確率密度関数を $p_X(x)$ とする
また、 $f(X)$ を新たな確率変数とする

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p_X(x) dx & V[f(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - m')^2 p_X(x) dx \\ &= \mathbb{E}[(X - m)^2] & &= \mathbb{E}[(f(X) - m')^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 & &= \mathbb{E}[f(X)^2] - \mathbb{E}[f(X)]^2 \end{aligned}$$

ただし $m = \mathbb{E}[X]$ $m' = \mathbb{E}[f(X)]$

2012/10/18

応用確率統計 第3回

3

例

例1

正規分布 $N(m, \sigma^2)$ は平均 m 、分散 σ^2 を持つ

分布: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ 特性関数: $\varphi(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2 / 2)$

例2

コーシー分布 $C(m, \sigma^2)$ は平均、分散ともに存在しない

分布: $p(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + (\frac{x-m}{\sigma})^2}$ 特性関数: $\varphi(t) = \exp(imt - \sigma|t|)$

積分確定値が存在しないため

$t = 0$ で微分不可能

2012/10/18

応用確率統計 第3回

4

一次元井戸型ポテンシャル

変数分離後シュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right) f(x) = E f(x)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \quad (n=1)$$

電子の存在位置を求める

平均
 $\bar{x} = \int_{-L}^L f^*(x) x f(x) dx$
 $= 0$

分散
 $(\Delta x)^2 = \int_{-L}^L f^*(x) x^2 f(x) dx$
 $= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right) L^2 \approx 0.13 L^2$

平均、分散の定義式
量子力学では
以下の関係が成立
 $p_X(x) = |f(x)|^2$

2012/10/18

応用確率統計 第3回

5

標準化

標準化
確率変数 X が平均と分散をもつとき、変換 $Y = aX + b$ により
平均0、分散1とすること

平均が0より	分散が1より
$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[aX + b]$	$V[Y] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$
$= a\mathbb{E}[X] + b$	$= \mathbb{E}[(aX + b - (a\mathbb{E}[X] + b))^2]$
$= 0$	$= a^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
	$= a^2 V[X]$
	$= 1$
$b = -a\mathbb{E}[X]$	$a = 1/\sqrt{V[X]}$

$Y = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{V[X]}}$ により標準化がなされる

2012/10/18

応用確率統計 第3回

6

メディアン（中央値）

メディアン（中央値）とは

累積分布の順位が中央となる値のこと

メディアンの定義式

$$\int_{-\infty}^{M-0} p_X(x)dx = \int_{M+0}^{\infty} p_X(x)dx$$
$$P(X < M) = P(X > M) = 0.5$$

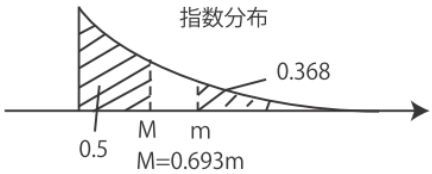
2012/10/18

応用確率統計 第3回

7

指数分布のメディアン

左右非対称な分布では平均 m とメディアン M が異なる



2012/10/18

応用確率統計 第3回

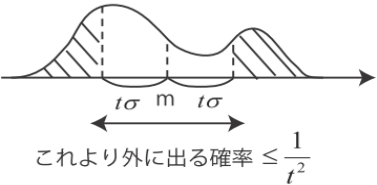
8

チェビシェフ不等式

チェビシェフ不等式

$E[X] = m, V[X] = \sigma^2$ ならば、任意の $t > 0$ について

$$P(|X - m| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$



2012/10/18

応用確率統計 第3回

9

チェビシェフ不等式の証明

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p_X(x) dx \\ &\geq \int_{|x - m| \geq t\sigma} (x - m)^2 p_X(x) dx \\ &\geq \int_{|x - m| \geq t\sigma} (t\sigma)^2 p_X(x) dx \\ &= t^2 \sigma^2 P(|X - m| \geq t\sigma) \\ P(|X - m| \geq t\sigma) &\leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

2012/10/18

応用確率統計 第3回

10

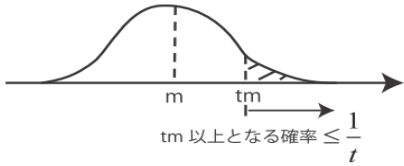
マルコフ不等式

マルコフ不等式

非負の関数 $f(x)$ について $E[f(X)] = m$ ならば、任意の $t > 0$ について

$$P(f(X) \geq tm) \leq \frac{1}{t}$$

関数 $f(x) \rightarrow y, f(X) \rightarrow Y$ としてもよい



2012/10/18

応用確率統計 第3回

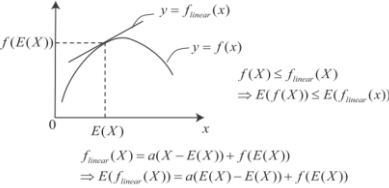
11

イエンセエン不等式

イエンセエン不等式

連続かつ上に凸な関数 $f(x)$ に対して

$$E[f(X)] \leq f(E[X])$$



- 発展
- $f(x)$ が上に凸
 $E[f(X)] \leq f(E[X])$
 - $f(x)$ が下に凸
 $E[f(X)] \geq f(E[X])$
 - $f(x)$ が一次関数
 $E[f(X)] = f(E[X])$

$$f(x) = x^2 \text{ は下に凸より、} V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$$

2012/10/18

応用確率統計 第3回

12

2012/10/18

応用確率統計 第3回

13

付録A 代表的分布の平均・分散

分布	平均	中央値	分散
一様分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正規分布	m	m	σ^2
レイリー分布	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\sigma\sqrt{\ln 4}$	$\frac{(4-\pi)\sigma^2}{2}$
指数分布	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\ln 2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ポアソン分布	λ		λ

平均と分散の文字の定義は第2回の講義の付録参照

2012/10/18

応用確率統計 第3回

14