

第2回 確率変数

荒木 純道
20121011

2012/10/11

応用確率統計 第2回

1

用語について

確率論	統計学
全体集合 Ω	標本空間 Ω 、全事象 Ω
要素 ω	単一事象 ω
部分集合 A	事象 A
補集合 A^c	余事象 A^c
空集合 ϕ	空事象 ϕ
$A \cap B = \phi$	A と B は互いに排反な事象
確率的に ω を1つ選ぶこと	試行
選ばれた ω	実現値 ω

2012/10/11

応用確率統計 第2回

2

実数上の確率空間

実数全体の集合は非可算集合。つまり要素に自然数の番号をふることができない。

高々可算集合の場合のようなやり方では確率空間を構成できない。

全体集合 $\Omega = \mathbb{R}$
 $= \{-\infty < x < \infty\}$

試行により実数 $x \in \mathbb{R}$ が得られる。

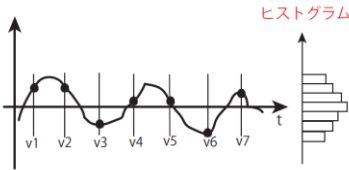
2012/10/11

応用確率統計 第2回

3

実数上の確率空間

例：アナログ信号の電圧波形 $v(t)$ の標準化された値電圧の大きさを縦軸としている。



2012/10/11

応用確率統計 第2回

4

確率密度関数

ダーツの的の上の小さい面積 S に当たる確率は、ほぼ S に比例 $S \rightarrow 0$ とすると、当たる確率 $\rightarrow 0$ によって、1つの点に当たる確率は0

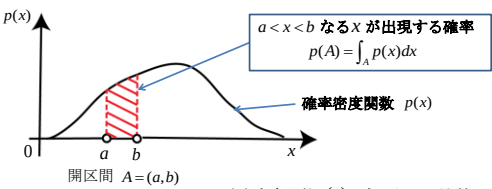
確率関数 $p(x)$ は0となり、意味を持たない。

2012/10/11

応用確率統計 第2回

5

確率密度関数



確率密度関数 $p(x)$ に求められる性質

1. $p(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $\int_A p(x) dx$ が、 A に対して、有限が確定
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ (全確率が1)

2012/10/11

応用確率統計 第2回

6

実数上の確率空間

R : 実数全体
 (R, B, P) B : 集合族。実数 R の部分集合の集合、制限あり
(あらゆる部分集合の集合ではない)
 P : 実数上の確率測度
 $P(A)$ が計算できるような A の集合 (ボレル集合族)

$$P(A) = \int_A p(x)dx, A \in B$$

$p(x)$: 確率密度関数(Probability Distribution Function, PDF)

実数上の確率空間

注1 : ボレル集合族
 $P(A) = \int_A p(x)dx$
が有限確定となるような $A \in B$ は、ボレル集合族 B の要素と与えられる。

1. $\Omega \in B$

2. $A \in B$

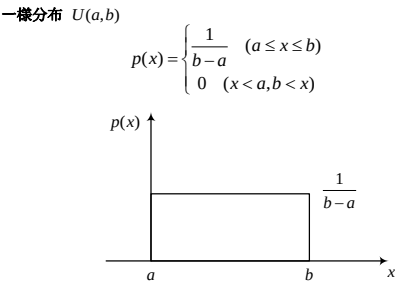
3. 任意の加算個の $A_1, A_2, \dots \in B$ について
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$$

4. B は任意の开区間 (a, b) を含む最小のシグマ加法族

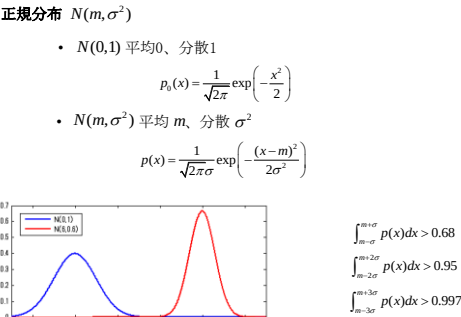
シグマ加法族

ボレル集合族

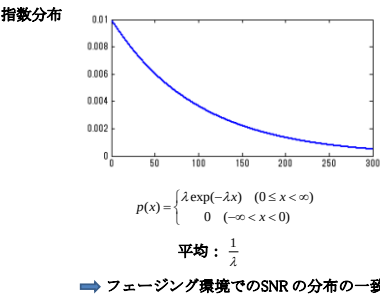
PDF (確率密度関数) の例



PDF (確率密度関数) の例



PDF (確率密度関数) の例



N次元ユークリッド空間上の確率空間 :

(R^N, B, P)
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in R^N, A \subset R^N$ として
$$P(A) = \int_A p(x)dx = \iint \dots \int_A p(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

が有限確定となるような A の集合を B とする。
N次元正規分布の $p(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$
$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(S)}} \exp\left(-\frac{(x-m)^T S^{-1} (x-m)}{2}\right)$$

ただし $m = \bar{x}, S = (x - \bar{x})(x - \bar{x})^T$

累積分布関数 (CDF)

$F_X(x) = P(X \leq x)$

確率変数 X が任意の x より小さいか等しい確率

- 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- 2. CDF $F_X(x)$ は x について単調非減少の特性がある。
- 3. λ が $(x_1 < X \leq x_2)$ の範囲内に入る確率

$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

※ PDFとCDFの関係

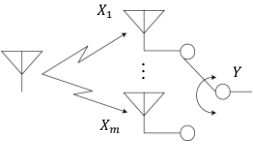
$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$

選択ダイバーシチ (変数変換)

複数の受信信号のうち電力レベルの大きな信号を選んで受信する

設定

送信アンテナが1つ、受信アンテナが3つあるときに受信側の3つの確率的に独立な信号 (X_1, X_2, X_3) のうち電力の大きな1つを選んで受信する
 $Y = \max(X_1, X_2, X_3)$
このとき、各受信信号は以下の分布に従う
 $p_{X_i}(x_i) = \exp(-x_i)$
 Y の確率密度関数を求める



選択ダイバーシチ (変数変換)

この変数変換ではCDFを用いて変数変換後のPDFを導出する

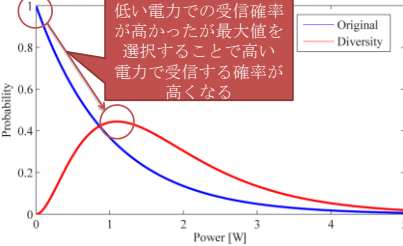
変数 Y の定義から以下の不等式が成立する
 $X_i \leq Y \ (i = 1, 2, 3)$
元のPDFから上の式を満たす確率は以下の式で表すことができる
 $P(Y \geq X_i) = \int_0^y p_{X_i}(x_i) dx_i = 1 - \exp(-y)$
この関係は全ての変数で成立するため変数 Y のCDFは以下のように求める
 $P_Y(y) = (1 - \exp(-y))^3$

p13のPDFとCDFの関係から以下のようにPDFを求めることができる

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{\partial P_Y(y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial (1 - e^{-y})^3}{\partial y} \\ &= 3(1 - e^{-y})^2 e^{-y} \\ &= 3e^{-3y} - 6e^{-2y} + 3e^{-y} \end{aligned}$$

選択ダイバーシチ (変数変換)

受信信号の電力レベルが大きい状態で受信できる回数が多くなり、通信品質が向上する



付録A 確率変数の変換

Diracのデルタ関数は次式で与えられるものとする。 $f(x)$ は任意関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

確率変数の変換の際には以下のデルタ関数の性質を用いる

デルタ関数の性質

x_i は区間 $[a, b]$ における $g(x) = 0$ の根であり、
 $g'(x) \neq 0$ ならば以下が成立

$$\int_a^b f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

付録A 確率変数の変換 (畳込み)

問題例1

X, Y は独立で、それぞれ平均0分散 σ_x^2 と平均0分散 σ_y^2 の正規分布に従う確率変数である。新たな確率変数を $Z = X + Y$ とするとき Z の確率密度関数を求めよ

$$\begin{aligned}
 p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x - y) p_Y(y) dy dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)x^2 - 2\sigma_y^2zx + \sigma_y^2z^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) dx
 \end{aligned}$$

独立な確率変数の和の変数変換は特性関数法でも導出可能

デルタ関数の性質

通分してxについて整理

2012/10/11

応用確率統計 第2回

19

付録A 確率変数の変換 (畳込み)

$$\begin{aligned}
 p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)x^2 - 2\sigma_y^2zx + \sigma_y^2z^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\sigma_y^2zx/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sigma_y^2z^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma_y^2z/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2))^2 - \sigma_y^4z^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 + \sigma_y^4z^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma_y^2z/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2))^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_y^4z^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma_y^2z/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2))^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right)
 \end{aligned}$$

平方完成

変数分離

確率の定義より積分値は1

独立な正規分布に従う2変数の和によりできる確率変数は元の確率変数の平均と分散の和が新しい確率変数の平均と分散になる

2012/10/11

応用確率統計 第2回

20

付録A 確率変数の変換 (ヤコビ)

問題例2

X, Y は独立で同一の平均0分散 σ^2 の正規分布に従う(i.i.d)とき 新しい確率変数を以下のように定義する

$$re^{j\theta} = X + jY$$

このとき、 r と θ の確率密度関数を求めよ。ただし、 $j = \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned}
 X, Y \text{は独立であるため、同時確率密度関数は以下のように計算できる} \\
 p_{XY}(x, y) &= p_X(x) p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \\
 p_{r\theta}(r, \theta) &= p_{XY}(x, y) \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right| \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
 &= p_{XY}(x, y) r \\
 &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned}$$

カルテシアン座標から極座標

$$\begin{aligned}
 p_r(r) &= \int_0^{2\pi} p_{r\theta}(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\
 p_\theta(\theta) &= \int_0^\infty p_{r\theta}(r, \theta) dr \\
 &= \frac{1}{2\pi}
 \end{aligned}$$

周辺化

振幅はレイリー分布に従う
位相は一様分布に従う

2012/10/11

応用確率統計 第2回

21

付録A 確率変数の変換

問題例3

ある確率変数 $X \geq 0$ が下の同時確率密度関数に従うとする

$$p_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

新しい確率変数を $Z = X^2$ とすると、 Z の確率密度関数を求めよ。

$$\begin{aligned}
 p_Z(z) &= \int_0^\infty \delta(z - x^2) p_X(x) dx \\
 &= \int_0^\infty \delta(f(x)) p_X(x) dx \\
 &= \frac{p_X(\sqrt{z})}{|f'(\sqrt{z})|} \\
 &= \frac{\sqrt{z}/\sigma^2 \exp(-z/2\sigma^2)}{2\sqrt{z}} \\
 &= \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned}$$

デルタ関数の性質を利用
また、 $f(x) = 0$ の根は値の範囲から $x = \sqrt{z}$

レイリー分布は指数分布へ

2012/10/11

応用確率統計 第2回

22

付録B 例2と例3の物理的な意味

通信では様々な電波が伝搬し、端末側での受信時には重ね合わさっている

伝搬モデル

$$h(t) = \sum_i h_i(t) = x + jy$$

独立な変数 $(h_i(t))$ の和の分布は中心極限定理によりガウス分布に従う

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

極座標変換で振幅の確率分布を導出

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad p_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right)$$

電力分布導出($z = r^2$)

例2と例3で電波伝播の確率モデルの解析を行った。
このレベル変動をフェージングと呼ぶ

2012/10/11

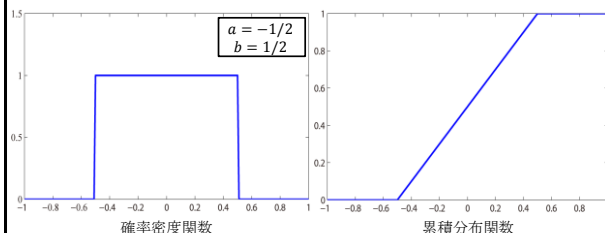
応用確率統計 第2回

23

付録C 代表的な分布の例

連続一様分布

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad P_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{for } x > b \end{cases}$$



2012/10/11

応用確率統計 第2回

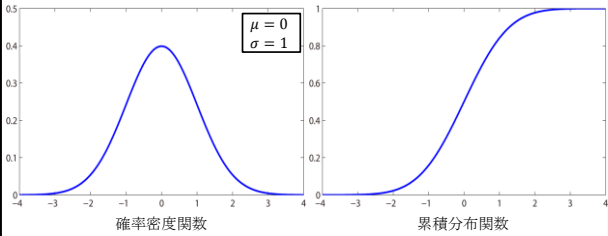
24

付録C 代表的な分布の例

正規分布

誤差関数

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad P_X(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$$



2012/10/11

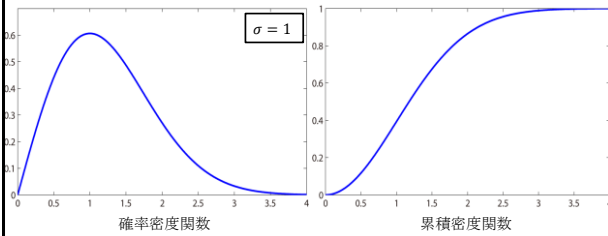
応用確率統計 第2回

25

付録C 代表的な分布の例

レイリー分布

$$p_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad P_X(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$



2012/10/11

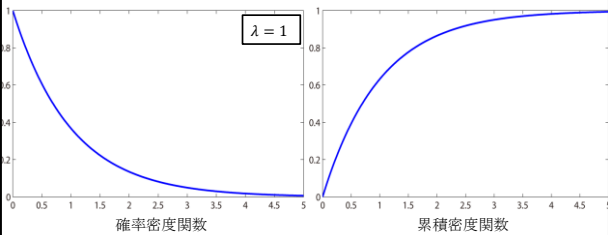
応用確率統計 第2回

26

付録C 代表的な分布の例

指数分布

$$p_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad P_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$



2012/10/11

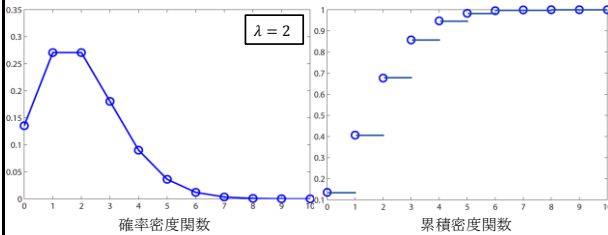
応用確率統計 第2回

27

付録C 代表的な分布の例

ポアソン分布

$$p_X(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad P_X(X \leq k) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!}$$



2012/10/11

応用確率統計 第2回

28