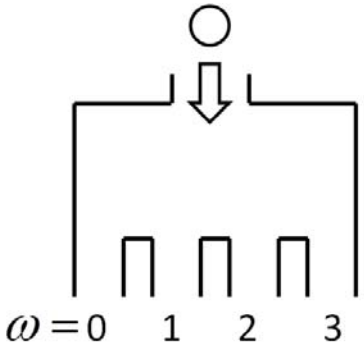
第１回問題

これらの問題は成績とは関係ありません. 興味のある人は解いてください.

成績評価用の問題演習は 10 月 13 日から行います.

問１



ブラックボックスに玉を入れると 4 つの出口（$\omega = 0, 1, 2, 3$）のいずれから出る。確率空間を構成するために、

1. Ω を求めよ。
2. $p(\omega)$ を適当に定義せよ。
3. 2^{Ω} を書け。
4. $p(\omega)$ から、P({1,2}) を求めよ.

問２

確率測度 P の（１）〜（３）の性質より、

$$P(\phi) = 0$$

を示せ。

問３

表と裏が等確率で出るコインを投げ、裏が出るまで投げ続ける。投げた回数を ω として、確率関数

$$p(\omega)$$

を求めよ。また、奇数の ω が得られる確率

$$P(\{1, 3, 5, ...\})$$

を求めよ。

問４

可算集合 {1,2,3...} を Ω とするときの確率関数 $p(\omega)$ は、

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = 0$$

でなければならないことが示される. もし上式が正の値の極限をもつと仮定すると、どのような問題が生じるか？

第 1 回解答

問 1

(1) $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

(2) p(0)=0.4,p(1)=0.3,p(2)=0.2,p(3)=0.1
(0 以上で、和が 1 になればよい.)

(3) 2^{Ω}={ϕ,{0},{1},{2},{3},{0,1},{0,2},{0,3},{1,2 },{1,3},{2,3},{0,1,2},{0,1,3},{0,2,3},{1,2,3},Ω} (ϕ は {} でもよい.Ω は {0,1,2,3} でもよい.)

(4)

$$\begin{aligned} P(\{1,2\}) &= \sum_{\omega \in \{1,2\}} p(\omega) \\ &= p(1) + p(2) \\ &= 0.3 + 0.2 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

問 2

確率測度の性質 (3) より、

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$A_1, A_2 \ldots$ をすべて ϕ(空集合) とすると、$A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$ も成立する. 上式左辺は

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \phi = \phi$$

なので $P(\phi)$.

$$P(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi) \Rightarrow 0 = \sum_{i=2}^{\infty} P(\phi)$$

これは $P(\phi) \neq 0$ と仮定すると矛盾し、$P(\phi) = 0$ と仮定すると矛盾しない. よって、$P(\phi) = 0$.

問 3

例えば $\omega = 4$ が実現する確率は、コインが表、表、表、裏となる確率であり、それは

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2^{-4}$$

である. よって、一般に、

$$p(\omega) = 2^{-\omega}$$

と書けるので、求める確率は次のようになる.

$$\begin{aligned} P(\{1,3,5,...\}) &= \sum_{\omega \in \{1,3,5,...\}} p(\omega) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p(2n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

問 4

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = a > 0$$

とすると、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \mid p(n \geq N) - a \mid < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので例えば $\frac{a}{2}$ とおくと、

$$\exists N, \mid p(n \geq N) - a \mid < \frac{a}{2}$$

したがって、

$$p(n \geq N) > \frac{a}{2}$$

となると、P(Ω)=1 が成り立たなくなる. つまり、

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=1,2,3,\ldots} p(n) \\ &\geq \sum_{n=N,N+1,\ldots} p(n) \\ &> \sum_{n=N,N+1,\ldots} \frac{a}{2} \to \infty \end{aligned}$$