

第1回 確率統計とは

荒木 純道
20121004

2012/10/4

応用確率統計 第1回

1

確率・統計とは

- 確率論
 - 確率的現象を理論的に扱う。
 - 確率空間 ← 人間が設定
 - その上に理論体系を構築(基礎的)
- 統計学
 - 現実起こる現象から、その背後にある確率的構造を推測し、結果を導く(応用的)

2012/10/4

応用確率統計 第1回

2

確率・統計とは

- 応用分野
 - 通信工学(回路の雑音、通信路のゆらぎや雑音)
 - 情報理論(情報量、データ圧縮、ネットワークトラフィック)
 - 機械学習・認識、実験のデータ処理と解釈、製造プロセス評価、機器の信頼性、天気予報、経済予測、遺伝子解析、etc.

たいていの現象には完全な予測が不可能な”ゆらぎ”が伴うため
確率・統計で表現する必要がある

2012/10/4

応用確率統計 第1回

3

確率空間[集合]

- 集合 Ω
 - Ω が有限集合
例: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ or 投, 表, 裏
 - Ω が可算集合
例: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ or $\mathbb{Q}$, 有理数全体
 - Ω が非可算集合(有限集合でなく、自然数全体と1対1対応ではない)
例: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$

以降は高々可算集合の
場合の議論を行う

2012/10/4

応用確率統計 第1回

4

確率空間[確率関数]

- 確率関数 $p(\omega)$ (Ω の各要素が選ばれる確率)
 - 定義
 - Ω から実数への写像で
 - 1. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $p(\omega) \geq 0$
 - 2. $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

例: 偏りのあるサイコロ
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として
 $p(1) = p(6) = 0.15$
 $p(2) = p(5) = 0.17$
 $p(3) = p(4) = 0.18$

2012/10/4

応用確率統計 第1回

5

確率空間[確率測度]

- 確率測度 $P(\cdot)$ (Ω のある部分集合から選ばれる確率)
 - Ω の部分集合全体を 2^Ω と書く(べき集合、集合の集合=集合族)
例: $\Omega = \{a, b\}$ とした場合
 $2^\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 - $A \in 2^\Omega$ に対して

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

例: 前ページの偏りのあるサイコロより
 $P(\{1, 4\}) = p(1) + p(4)$
 $= 0.15 + 0.18$
 $= 0.33$

偏りのあるサイコロ

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として
 $p(1) = p(6) = 0.15$
 $p(2) = p(5) = 0.17$
 $p(3) = p(4) = 0.18$

2012/10/4

応用確率統計 第1回

6

確率空間 [確率測度]

- P が確率測度であるならば

1. 任意の $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. 任意の $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ について、 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

を満たす

2012/10/4

応用確率統計 第1回

7

確率空間 [確率測度]

集合 $\longrightarrow$ 確率

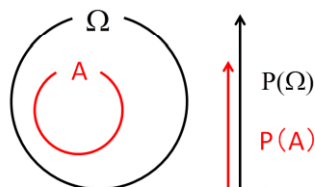


図1. 集合と確率の関係

2012/10/4

応用確率統計 第1回

8

確率空間

- Ω が高々可算集合のとき、 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ の組を確率空間という

- 集合族は 2^{Ω} である必要はなく、例えば

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ という組が以下のように定義されている場合

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$$

$$P(\emptyset) = 0, P(\{1, 3, 5\}) = P(\{2, 4, 6\}) = 0.5, P(\Omega) = 1$$

だけでも確率空間である

- Ω が可算集合となる1つの例

コインの裏が出るまで投げ続け、投げた回数を ω とする

$$\text{例: } \Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{表、表、裏} \leftarrow \omega = 3$$

$$\text{表、裏} \leftarrow \omega = 2$$

$$\text{表、表、表、表、表、裏} \leftarrow \omega = 7$$

$$\text{裏} \leftarrow \omega = 1$$

2012/10/4

応用確率統計 第1回

9