(1) 以下の諸量とベクトルを定義.

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}=\left[X_{\mathrm{B}},Y_{\mathrm{B}}\right]^{\mathrm{T}},\dot{\boldsymbol{B}}=\left[\dot{X}_{\mathrm{B}},\dot{Y}_{\mathrm{B}}\right]^{\mathrm{T}},\ddot{\boldsymbol{B}}=\left[\ddot{X}_{\mathrm{B}},\ddot{Y}_{\mathrm{B}}\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}=\left[X_{\mathrm{P}},Y_{\mathrm{P}}\right]^{\mathrm{T}},\dot{\boldsymbol{P}}=\left[\dot{X}_{\mathrm{P}},\dot{Y}_{\mathrm{P}}\right]^{\mathrm{T}},\ddot{\boldsymbol{P}}=\left[\ddot{X}_{\mathrm{P}},\ddot{Y}_{\mathrm{P}}\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}=\left[X_{\mathrm{Gb}},Y_{\mathrm{Gb}}\right]^{\mathrm{T}},\dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\left[\dot{X}_{\mathrm{Gb}},\dot{Y}_{\mathrm{Gb}}\right]^{\mathrm{T}},\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\left[\ddot{X}_{\mathrm{Gb}},\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}}\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}=\left[X_{\mathrm{Gc}},Y_{\mathrm{Gc}}\right]^{\mathrm{T}},\dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}=\left[\dot{X}_{\mathrm{Gc}},\dot{Y}_{\mathrm{Gc}}\right]^{\mathrm{T}},\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}=\left[\ddot{X}_{\mathrm{Gc}},\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}\right]^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad \ldots(1)$$

下図 1 のフリーボディダイヤグラムにおいて, ニュートン・オイラー法を適用する.

$$\begin{cases} m_{\mathrm{b}}\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}} \\ I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}=\tau_{\mathrm{A}}-\tau_{\mathrm{B}}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}})\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}})\times(-\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}) \\ m_{\mathrm{c}}\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{F} \\ I_{c}\ddot{\phi}_{c}=\tau_{\mathrm{B}}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}_{c})\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}+(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{G}_{c})\times\boldsymbol{F} \end{cases} \quad \ldots(2)$$

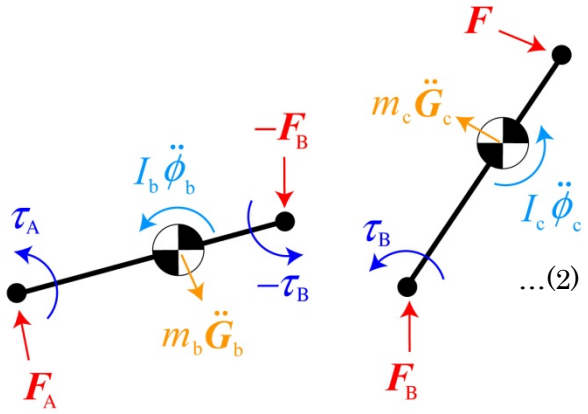

図 1 フリーボディダイヤグラム

これらのベクトル式を成分で書けば，次式が得られる.

$$\begin{cases} m_{\mathrm{b}}\ddot{X}_{\mathrm{b}}=F_{\mathrm{A},x}-F_{\mathrm{B},y} \\ m_{\mathrm{b}}\ddot{Y}_{\mathrm{b}}=F_{\mathrm{A},y}-F_{\mathrm{B},x} \\ I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}=\tau_{\mathrm{A}}-\tau_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gb}}F_{\mathrm{A},y}+Y_{\mathrm{Gb}}F_{\mathrm{A},x}-(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gb}})F_{\mathrm{B},y}+(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gb}})F_{\mathrm{B},x} \\ m_{\mathrm{c}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}}=F_{\mathrm{B},x}+F_{x} \\ m_{\mathrm{c}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}=F_{\mathrm{B},y}+F_{y} \\ I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}=\tau_{\mathrm{B}}+(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}})F_{\mathrm{B},y}-(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}})F_{\mathrm{B},x}+(X_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{Gc}})F_{y}-(Y_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{Gc}})F_{x} \end{cases} \quad \ldots(3)$$

ここで $\boldsymbol{f}=\left[F_{\mathrm{A},x}\ F_{\mathrm{A},y}\ F_{\mathrm{B},x}\ F_{\mathrm{B},y}\ \tau_{\mathrm{A}}\ \tau_{\mathrm{B}}\right]^{\mathrm{T}}$ と定義すると，上式が $A\boldsymbol{f}=\boldsymbol{b}$ と行列形式で書ける.

ここに，A，$\boldsymbol{b}$ の定義は以下の通り.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ Y_{\mathrm{Gb}} & -X_{\mathrm{Gb}} & Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gb}} & -(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gb}}) & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}}) & X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}} & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} m_{\mathrm{b}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}} \\ m_{\mathrm{b}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}} \\ I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}} \\ m_{\mathrm{c}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}}-F_{x} \\ m_{\mathrm{c}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}-F_{y} \\ I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}-(X_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{Gc}})F_{y}+(Y_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{Gc}})F_{x} \end{bmatrix} \quad \ldots(4)$$

ここで改めて(4)式を見ると，節 c に関連する下半分（点線部分）のみに着目し，先に解くことができる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}}) & X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{\mathrm{B},x} \\ F_{\mathrm{B},y} \\ \tau_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_c X_{Gc}-F_x \\ m_c Y_{Gc}-F_y \\ I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}-(X_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{Gc}})F_y+(Y_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{Gc}})F_x \end{bmatrix} \quad \ldots(5)$$

これより，

$$\begin{cases} F_{\mathrm{B},x}=m_{\mathrm{c}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}}-F_x,\ F_{\mathrm{B},y}=m_{\mathrm{c}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}-F_y, \\ -F_{\mathrm{B},x}(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}})+F_{\mathrm{B},y}(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}})+\tau_{\mathrm{B}}=I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}-(X_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{Gc}})F_y+(Y_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{Gc}})F_x \end{cases} \quad \ldots(6)$$

となり，$(F_x, F_y)=(0,0)$と置くと，$\tau_{\mathrm{B}}=m_{\mathrm{c}}\left\{(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}})\ddot{X}_{\mathrm{Gc}}-(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}})\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}\right\}+I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}$ が求まる．

次に，(4)式の節 b に関連する上半分（破線部分）を計算すると，

$$\begin{cases} F_{\mathrm{A},x}-F_{\mathrm{B},x}=m_{\mathrm{b}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}} \rightarrow F_{A,x}=m_{\mathrm{b}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}}+m_{\mathrm{c}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}} \\ F_{\mathrm{A},y}-F_{\mathrm{B},y}=m_{\mathrm{b}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}} \rightarrow F_{A,y}=m_{\mathrm{b}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}}+m_{\mathrm{c}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}} \\ Y_{\mathrm{Gb}}F_{\mathrm{A},x}-X_{\mathrm{Gb}}F_{\mathrm{A},y}+(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gb}})F_{\mathrm{B},x}-(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gb}})F_{\mathrm{B},y}+F_{\mathrm{B},x}-F_{\mathrm{B},y}+\tau_{\mathrm{A}}-\tau_{\mathrm{B}}=I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}} \end{cases} \quad \ldots(7)$$

これより，$\tau_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{b}}(X_{\mathrm{Gb}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}}-Y_{\mathrm{Gb}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}})+m_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{Gc}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{Gc}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}})+I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}+I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}$

(2) 運動学解析より，各点の位置・速度・加速度が得られる．機構姿勢を右図 2 に示す．

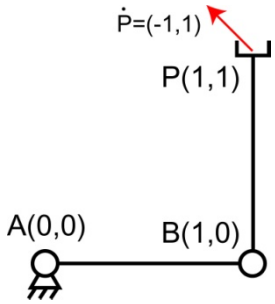

図 2 与えた機構姿勢

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} 0.5\cos\theta_{\mathrm{A}} \\ 0.5\sin\theta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} -0.5\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\sin\theta_{\mathrm{A}} \\ 0.5\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\cos\theta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{Gb}} \\ X_{\mathrm{Gb}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}},$$

$$\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} -0.5\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}\sin\theta_{\mathrm{A}}-0.5\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\cos\theta_{\mathrm{A}} \\ 0.5\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}\cos\theta_{\mathrm{A}}-0.5\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\sin\theta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{Gb}} \\ X_{\mathrm{Gb}} \end{bmatrix}\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}+\begin{bmatrix} -X_{\mathrm{Gb}} \\ -Y_{\mathrm{Gb}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \cos\theta_{\mathrm{A}} \\ \sin\theta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\sin\theta_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{A}}\cos\theta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{B}} \\ X_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}},\ \ddot{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{B}} \\ X_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}+\begin{bmatrix} -X_{\mathrm{B}} \\ -Y_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix} \cos\theta_{\mathrm{A}}+0.5\cos(\theta_{\mathrm{A}}+\theta_{\mathrm{B}}) \\ \sin\theta_{\mathrm{A}}+0.5\sin(\theta_{\mathrm{A}}+\theta_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{Gc}} & -(\mathrm{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{B}}) \\ X_{\mathrm{Gc}} & (\mathrm{X}_{\mathrm{Gc}}-X_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}, \quad \ldots(8)$$

$$\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{Gc}} & -(\mathrm{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{B}}) \\ X_{\mathrm{Gc}} & (\mathrm{X}_{\mathrm{Gc}}-X_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -X_{\mathrm{Gc}} & -(\mathrm{X}_{\mathrm{Gc}}-X_{\mathrm{B}}) \\ -Y_{\mathrm{Gc}} & (\mathrm{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \cos\theta_{\mathrm{A}}+\cos(\theta_{\mathrm{A}}+\theta_{\mathrm{B}}) \\ \sin\theta_{\mathrm{A}}+\sin(\theta_{\mathrm{A}}+\theta_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{\mathrm{P}} \\ Y_{\mathrm{P}} \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{P}} & -(\mathrm{Y}_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{B}}) \\ X_{\mathrm{P}} & (\mathrm{X}_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix} -Y_{\mathrm{P}} & -(\mathrm{Y}_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{B}}) \\ X_{\mathrm{P}} & (\mathrm{X}_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -X_{\mathrm{P}} & -(\mathrm{X}_{\mathrm{P}}-X_{\mathrm{B}}) \\ -Y_{\mathrm{P}} & (\mathrm{Y}_{\mathrm{P}}-Y_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

①について，速度の条件より，$\dot{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{\mathrm{A}}-\dot{\theta}_{\mathrm{B}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$．よって$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$．

加速度（速度一定）の条件より，$\ddot{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．よって$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{\mathrm{A}} \\ \ddot{\theta}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$．

②について，$\begin{bmatrix}\dot{\phi}_{\mathrm{b}}\\ \dot{\phi}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\\ \dot{\theta}_{\mathrm{A}}+\dot{\theta}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}\\ \ddot{\phi}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}\\ \ddot{\theta}_{\mathrm{A}}+\ddot{\theta}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.

③について，(8)式より

$$\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}-Y_{\mathrm{Gb}}\\ X_{\mathrm{Gb}}\end{bmatrix}\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}+\begin{bmatrix}-X_{\mathrm{Gb}}\\ -Y_{\mathrm{Gb}}\end{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix}\cdot 1+\begin{bmatrix}-0.5\\ 0\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}-0.5\\ 0.5\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{c}}&=\begin{bmatrix}-Y_{\mathrm{Gc}} & -(Y_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{B}})\\ X_{\mathrm{Gc}} & (X_{\mathrm{Gc}}-X_{\mathrm{B}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_{\mathrm{A}}\\ \ddot{\theta}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-X_{\mathrm{Gc}} & -(X_{\mathrm{Gc}}-X_{\mathrm{B}})\\ -Y_{\mathrm{Gc}} & (Y_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{B}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}\\ \dot{\theta}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5\\ 0.5\end{bmatrix}\end{aligned}.$$

④について，(1)より $\tau_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{b}}(X_{\mathrm{Gb}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}}-Y_{\mathrm{Gb}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}})+m_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{Gc}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{Gc}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}})+I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}+I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}$.

これまでに求めた各点に関する諸量と与えられた物理量を代入すると，駆動トルクは次のように求まる．

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{A}}&=m_{\mathrm{b}}(X_{\mathrm{Gb}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gb}}-Y_{\mathrm{Gb}}\ddot{X}_{\mathrm{Gb}})+m_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{Gc}}\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}-Y_{\mathrm{Gc}}\ddot{X}_{\mathrm{Gc}})+I_{\mathrm{b}}\ddot{\phi}_{\mathrm{b}}+I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}\\ &=5\left[0.5\times 0.5-0\times(-0.5)\right]+5\left[1\times 0.5-0.5\times(-0.5)\right]+0.5\times 1+0.5\times(-1)=5[\mathrm{N\cdot m}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{B}}&=m_{\mathrm{c}}\left\{(Y_{\mathrm{B}}-Y_{\mathrm{Gc}})\ddot{X}_{\mathrm{Gc}}-(X_{\mathrm{B}}-X_{\mathrm{Gc}})\ddot{Y}_{\mathrm{Gc}}\right\}+I_{\mathrm{c}}\ddot{\phi}_{\mathrm{c}}\\ &=5\times\left[-0.5\times(-0.5)-0\times 0.5\right]+0.5\times(-1)=0.75[\mathrm{N\cdot m}]\end{aligned}$$