移動論第三 2012 伊東

10/4 第 1 回 拡散方程式 定常拡散
10/11 第 2 回 静止媒体中の非定常拡散
10/18 第 3 回 対流物質移動 1次元
10/25 第 4 回 対流物質移動 2 次元
11/1 第 5 回 反応を伴う拡散
11/8 第 6 回 物質移動係数と境界層理論
■11/15 第 7 回 アナロジーと各種形状物質移動
11/22 第 8 回 分離プロセスの基礎 乾燥と湿球温度
11/29 第 9 回 吸着・クロマト
12/6 第 10 回 微分接触プロセス
(下山担当分)
12/13 第 11 回 蒸気圧
12/20 第 12 回 相平衡と溶解度（1）
1/10 第 13 回 相平衡と溶解度（2）
1/24 第 14 回 輸送物性（1）
1/31 第 15 回 輸送物性（2）
2/7 期末試験（S421 講義室）

担当教官:(前半)伊東 章 S1 421
(後半)下山裕介 S1 411

木曜 3,4 限(10:45-12:15) S421 講義室
実習は情報ネットワーク演習室第 1（D）(S4 3F)

伊東回は毎回演習レポート(手書きおよびプリントアウト)を課します。講義時間内に提出のこと。
（講義時間内に提出できなかった場合の〆切は当日 17:00, 提出は南 1 421 伊東居室前の Box へ。）

演習・実習用の Excel シートテンプレートファイルは以下にあります。当日のフォルダ“tp3_*”をデスクトップにコピーして使ってください。
1. [エクスプローラ]
2. “¥¥nest2.g.gsic.titech.ac.jp¥home0”を入力
3. “usr2/ito-a-ac/”に入る

3.2 乱流場の物質移動とアナロジー

層流場と異なり，乱流場では流体中の大小の渦が移動現象を支配する。よって渦拡散係数 ε_D により，Fick の拡散法則が修正される。

$$N_{\mathrm{A}}\left(\equiv k(c_{\mathrm{A}s}-c_{\mathrm{A}\infty})\right)=-(D_{\mathrm{AB}}+\varepsilon_D)\left.\frac{dc_{\mathrm{A}}}{dy}\right|_{y=0} \qquad (3.41)$$

（k は物質移動係数。）固体壁や界面からの乱流流れ中への拡散では，この渦拡散係数が拡散係数より数オーダー大きく，これが支配的となる。

一方，主流速度 U_∞ で流れる乱流場での運動量移動でも同じく渦動粘度 ε_M が支配的である。

$$\frac{\tau_w}{U_\infty}\left(\equiv\frac{c_f\rho}{2}U_\infty\right)=-(\nu+\varepsilon_M)\left.\frac{d(\rho u/U_\infty)}{dy}\right|_{y=0} \qquad (3.42)$$

ここで c_f は平板の摩擦係数である。（層流では式(3.32), (3.33)）乱流境界層での平板面で，規格化した速度と濃度の勾配が等しい:

$$\left.\frac{d(u/U_\infty)}{dy}\right|_{y=0}=\left.\frac{d(c_{\mathrm{A}}/(c_{\mathrm{A}s}-c_{\mathrm{A}\infty}))}{dy}\right|_{y=0} \qquad (3.43)$$

と考えると，式(3.41), (3.42)から次式となる。$\dfrac{c_fU_\infty}{2(\nu+\varepsilon_M)}=\dfrac{k}{(D_{\mathrm{AB}}+\varepsilon_D)}$ (3.44)

これが摩擦係数（運動量移動）と物質移動の相似性（アナロジー）を示す。どちらの移動も渦が支配的で，各渦が同じスケール（$(\varepsilon_M/\varepsilon_D)=1$）とすると，

$$\frac{c_f}{2} = \frac{k}{U_\infty} \quad (3.45)$$

となる。この右辺は物質移動のスタントン数 St_M である。(表 3.2)乱流場の摩擦係数は各種形状について実験的に得られているので，摩擦係数から乱流下の物質移動係数が推定できることになる。この乱流場における摩擦係数から物質移動係数（および伝熱係数）を類推することを「レイノルズ Reynolds のアナロジー」と呼ぶ。

レイノルズのアナロジーは Sc=1 の場合に限られ，実用的ではなかったので，Chilton-Colburn は以下のように流れの j 因子 factor: $j_M \equiv (c_f/2) = (f/2) =$ (3.46)

Sc 数で補正した物質移動の j 因子：$j_D \equiv \frac{k}{U_\infty} Sc^{2/3} = St_M Sc^{2/3} = Sh/(\mathrm{Re}\cdot Sc^{1/3})$ (3.47)

を定義して，j 因子間の関係：$j_M = j_D$ (3.48)

とした。これが実用的な Chilton-Colburn のアナロジーである。（実際は伝熱も含む 3 つの j 因子間の関係である。）これにより各種形状における乱流中の物質移動係数が順次以下のような相関式として得られる [3, p. 99]。適用される Sc 数の範囲は 0.5～10 とされる。図 3.16 にこれらの関係を Re に対して比較した。

平行平板流れ：乱流下の摩擦係数が，$c_f = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-1/2}$ (3.49)

なので，長さ L の平板平均の値についてアナロジーの関係が以下である。

$$j_M = j_D = 0.037\,\mathrm{Re}^{-0.2} \qquad (5\times10^5 < \mathrm{Re} \equiv \rho L U_\infty/\mu < 5\times10^8) \qquad (3.50)$$

円管内の流れ：管径 D，平均速度 u についての管摩擦係数が，

$$f = 0.046\,\mathrm{Re}^{-0.2} \quad (3.51)$$

（これは半理論式であるカルマンの式：$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0\log(\mathrm{Re}\sqrt{f}) - 0.4$ の近似式である。）

なので次式となる。

$$j_M = j_D = 0.023\,\mathrm{Re}^{-0.2} \qquad (10{,}000 < \mathrm{Re} \equiv \rho D u/\mu < 1{,}000{,}000) \quad (3.52)$$

円柱を横切る流れ：このような外部流れでは流体力学的な抵抗係数 C_D に形状抵抗と表面摩擦抵抗がふくまれるが，摩擦抵抗分のみ考慮した $(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}}$ を用いて，次式である。

$$(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}} = j_D = 0.193\,\mathrm{Re}^{-0.382} \quad (4{,}000 < \mathrm{Re} \equiv \rho D u/\mu < 40{,}000) \quad (3.53)$$

$$(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}} = j_D = 0.0266\,\mathrm{Re}^{-0.195} \qquad (40{,}000 < \mathrm{Re} < 250{,}000) \quad (3.54)$$

球まわり流れ（球の直径 D）：球の場合も摩擦抵抗の $(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}}$ を用いる。

$$(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}} = j_D = 0.37\,\mathrm{Re}^{-0.4} \qquad (20 < \mathrm{Re} \equiv \rho D u/\mu < 100{,}000) \quad (3.55)$$

充填層（均一球状粒子径 D_p）：

$$(j_M)_{\mathrm{skin\,friciton}} = j_D = 1.17\,\mathrm{Re}^{-0.415} \qquad (10 < \mathrm{Re} \equiv \rho D_p u/\mu < 2{,}500) \quad (3.56)$$

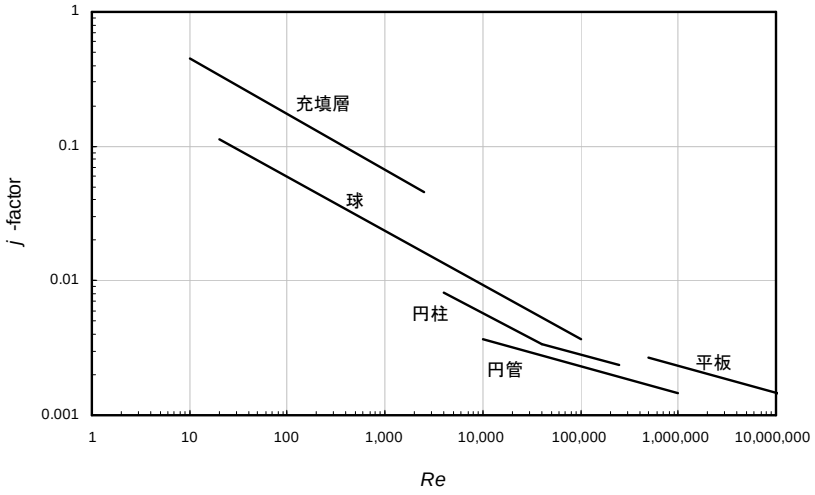


図 3.15 Chilton-Colburn の各種形状における j 因子 [3, p. 100)]

これらのアナロジーの提案の後，乱流の構造に関する考察を加味したアナロジー理論が考えられ，より実測に合う式が提案されている。例えば Friend-Metzner は壁近傍の渦拡散係数の変化を考慮して，次式を提案した。これにより Sc 数が 3,000 までの適合性が改良された [3)]。

$$St_M = \frac{(f/2)}{1.20 + 11.8\sqrt{f/2}(Sc-1)(Sc^{-1/3})} \quad (3.57)$$

【例題 3.4】 内径 D =0.053 m の円管内壁から桂皮酸($C_9H_8O_2$)が管内の速度 u の水の乱流流れに溶解する。溶解速度を測定したところ，St_M= 0.0000351 であった。Re= 35,800, Sc= 1,450 として，この実測値を各種アナロジーと比較せよ [3, p. 103)]。

（解）(3.51)式より摩擦係数は f= 0.00565 である。これより，

レイノルズのアナロジー: $St_M = f/2 = 0.00283$

Chilton-Colburn のアナロジー: $St_M = (f/2)/Sc^{2/3} = 0.0000220$

Friend-Metzner のアナロジー: $St_M = 0.0000346$。

やはり，改良されたアナロジーの方が適合性がよい。なお，u= 0.68 m/s なので，k= 2.4×10^{-5} m/s。拡散係数 D_{AB}=6.9×10-^{10} m^2/s を考慮すると，物質移動境膜厚さ δ は 29 μm となる。

3.3 各種形状における物質移動

固体表面から流れ中への物質移動に関する理論および相関式を，代表的な 4 つの形状について示す。図 3.17 は平行平板流れ(境界層流れ)，円管内流れ，円柱を横切る流れ，球周りの流れについて代表長さ D, L の定義と物質移動境膜厚さ δ の取り方を示したものである。ここで平行平板流れのみ代表長さ L と境膜厚さ δ の方向が異なる点が特徴である。

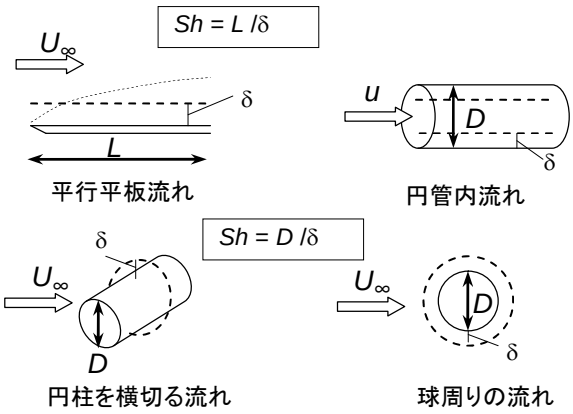


図 3.16 各形状の流れにおける代表長さと境膜厚さδ

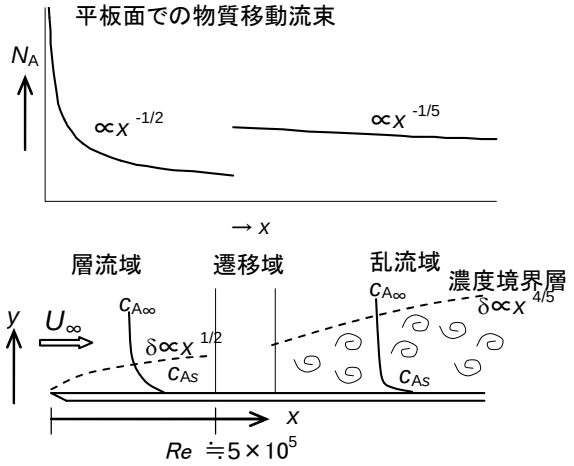


図 3.17 平行平板流れにおける濃度境界層と物質移動速度

平行平板流れ：平板レイノルズ数 $(\mathrm{Re} \equiv U_\infty x/\nu)$ が $\mathrm{Re} < 5\times10^5$ で層流境界層流れ，以降は遷移域を経て乱流境界層流れとなる。(図 3.18) 長さ L の平板平均について，層流では境界層理論の結果より次式である。

層流： $Sh = 0.664 Sc^{1/3}\,\mathrm{Re}_L^{\ 1/2}$ (3.58)

乱流境界層では速度・濃度境界層の厚さ自身は $x^{4/5}$ に比例して大きくなるが，平板近傍での速度・濃度勾配は層流に比べて増大する。平板平均値ではアナロジー（式(3.50)）より

$j_D = Sh/(\mathrm{Re}\cdot Sc^{1/3})$ なので，

乱流： $Sh = 0.037 Sc^{1/3}\,\mathrm{Re}_L^{\ 0.8}$ $(5\times10^5 < \mathrm{Re}_L < 5\times10^8)$ (3.59)

である。

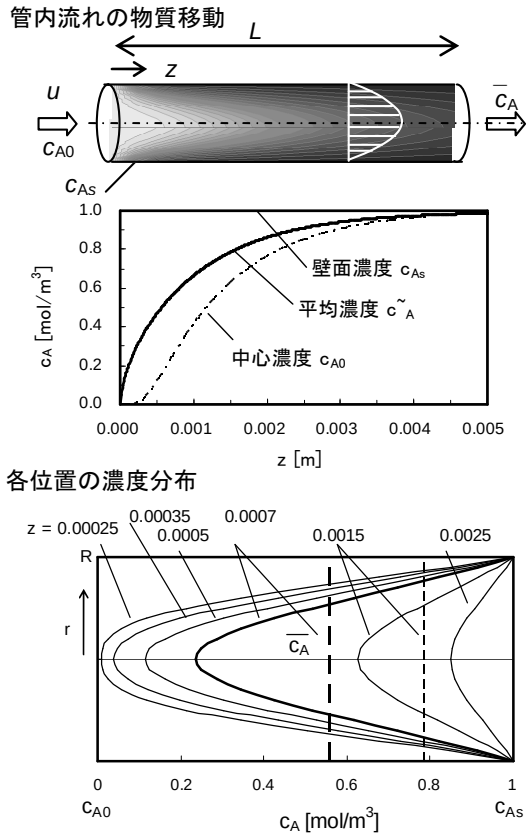


図 3.18 管内流れへの物質移動の様子（例題 2.27）

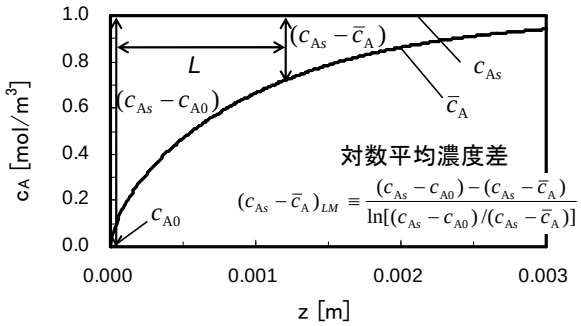


図 3.19 濃度推進力の定義－対数平均濃度差－

円管内流れ:内径 $D(=2R)$, 長さ L の円管内を平均速度 $\bar{u}$ で流体が流れており, 流体濃度は入口で c_{A0} である。管壁の成分濃度を c_{As} として, 流体中に成分が拡散するモデルを考える。管内のある位置において混合平均濃度 : $\bar{c}_A \equiv \dfrac{2}{\pi R^2 \bar{u}} \int_0^R c_A(r) u(r) r dr$ (3.60)

を定義する。図 3.19 に例題 2.27 の結果をもとに, 管内流れ方向の濃度分布の発達の様子と, 混合平均濃度 $\bar{c}_A$, 中心濃度 c_{A0} の変化を示す。図のように入口からある程度の距離 ($z > 0.0005\,\mathrm{m}$) からは濃度分布は相似形である。すなわち混合平均濃度 $\bar{c}_A$ で規格化した濃度分布は流れ方向 z で変化がない。$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{c_{As} - c_A}{c_{As} - \bar{c}_A}\right) = 0$ (3.61)

したがって規格化した壁面濃度勾配も一定値である。$\dfrac{(\partial c_A / \partial r)\big|_{r=R}}{(c_{As} - \bar{c}_A)} = \mathrm{Const.}$ (3.62)

これより管内流れでは入口付近を除いて Sh 数が一定値であることが示される。

$$Sh_x \equiv \frac{N_A}{D_{AB}(c_{As} - \bar{c}_A)/D} = \frac{D_{AB}(\partial c_A / \partial r)\big|_{r=R}}{D_{AB}(c_{As} - \bar{c}_A)/D} = \mathrm{Const.} \qquad (3.63)$$

解析的には流れ方向(z)濃度拡散項は省略した円筒座標の拡散の基礎式:

$$u(r)\frac{\partial c_A}{\partial z} = \frac{D_{AB}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) \qquad (64)$$

で速度分布 $u(r)$ に放物線速度分布を用い, 境界条件 : $z = 0 : c_A = c_{A0}$, $r = D/2 : c_A = c_{As}$, で解く対流物質移動の問題となる。この問題は Graetz 以来伝熱の分野で詳細に検討されており, 解析解(級数解)が得られている。その結果から, Sh 数一定の完全発達領域では, 長さ L の管平均 Sh 数が,

$$Sh = 3.66 \qquad (3.65)$$

が示されている。逆に入り口付近では速度分布を直線と近似して, Leveque の解 :

$$Sh = 1.65 Gz^{1/3},\ Gz \equiv \frac{D^2 \bar{u}}{z D_{AB}} = \left(\frac{D}{z}\right)\mathrm{Re}_D\, Sc = \left(\frac{D}{z}\right) Pe \qquad (3.66)$$

が得られている。ここで, Gz はグレーツ Graetz 数と呼ばれる。両式を含めた Gz 数の全範囲については, Hausen の近似式 [4, p. 176]:

$$Sh = 3.66 + \frac{0.0668 Gz}{1 + 0.04 Gz^{2/3}} \qquad (3.67)$$

があてはまる。

以上の関係を図 3.21 に示す。ただし, この円管内平均 Sh 数は次式のように対数平均濃度差 $(c_{As} - \bar{c}_A)_{LM}$ で定義されていることに注意する。(図 3.20)

$$Sh \equiv \frac{N_A}{D_{AB}(c_{As} - \bar{c}_A)_{LM}/D},$$
$$(c_{As} - \bar{c}_A)_{LM} \equiv \frac{(c_{As} - c_{A0}) - (c_{As} - \bar{c}_A)}{\ln[(c_{As} - c_{A0})/(c_{As} - \bar{c}_A)]} \qquad (3.68)$$

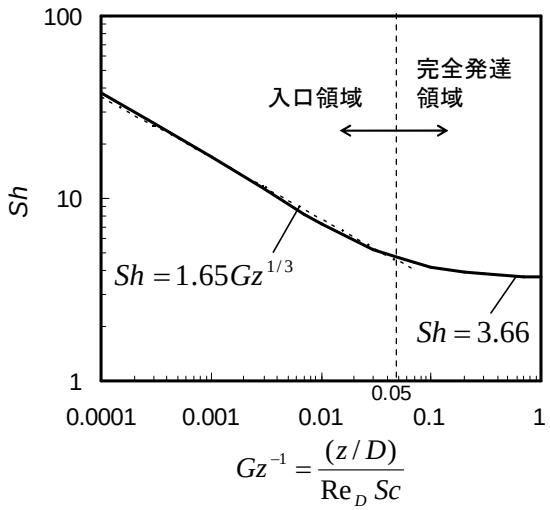


図 3.20 層流円管内流れ物質移動の Hauzenn の式<diff27.xls>

管内流れが乱流の範囲では，アナロジー（式(3.52)）からは，

$$Sh = j_D \mathrm{Re}\, Sc^{1/3} = 0.023 \mathrm{Re}^{0.8}\, Sc^{1/34} \qquad (3.69)$$

である。しかし，実用には空気流れ中への液の蒸発実験で得られた Gilliland-Sherwood の相関式：

$$Sh = 0.023 \mathrm{Re}^{0.83}\, Sc^{0.44} \qquad (3.70)$$

（$2000 < \mathrm{Re} < 35{,}000$，$0.6 < Sc < 2.5$）

が適用される。さらにこの式は Sc の指数を(1/3)にする

$$Sh = 0.023 \mathrm{Re}^{0.83}\, Sc^{1/3} \qquad (3.71)$$

（$2000 < \mathrm{Re} < 70{,}000$，$0.6 < Sc < 2500$）

ことで，液流れへの固体の溶解にも適用できることが実験的に確認されている[4, p. 181)]。

実際に Sh 数から管出口濃度を求めるには，先ず長さ L の円管内流れの着目成分について物質収支をとると，（流体濃度増加分）＝（壁面の物質移動流束）×（壁面積）なので，

$$(\pi/4) D^2 \bar{u} (\bar{c}_A - c_{A0}) = N_A \pi D L \qquad (3.72)$$

である。この N_A を管内流れの Sh 数（式(3.68)）に適用すると，次式となる。

$$Sh = \frac{D^2 \bar{u}}{4 L D_{AB}} \ln \frac{(c_{As} - c_{A0})}{(c_{As} - \bar{c}_A)} = \frac{1}{4} Gz \ln \frac{(c_{As} - c_{A0})}{(c_{As} - \bar{c}_A)} \qquad (3.73)$$

よって管長さ L での出口での流体平均濃度 $\bar{c}_A$ は，

$$\bar{c}_A = c_{As} - \frac{(c_{As} - c_{A0})}{\exp\left(\dfrac{4Sh}{Gz}\right)} = c_{As} - \frac{(c_{As} - c_{A0})}{\exp\left(\dfrac{4 Sh L D_{AB}}{D^2 \bar{u}}\right)} \qquad (3.74)$$

である。

【例題 3. 5】円管内流れへの物質拡散 <diff27.xls>（解説）

D=0.002 m の管内を空気が u= 0.1 m/s で流れており，壁から $c_{As} = 1$ = 1.0 mol/m^3 濃度で水蒸気が拡散している。空気の水蒸気濃度変化を求めよ。

（解）この場合は Gz<<1 なので，$Sh = 3.66$ である。式(3.74)より入口より z の距離における管出口濃度 $\bar{c}_A$ が求められる。図 3.22 に結果を差分法による数値解(例題 2. 27)と比較した。

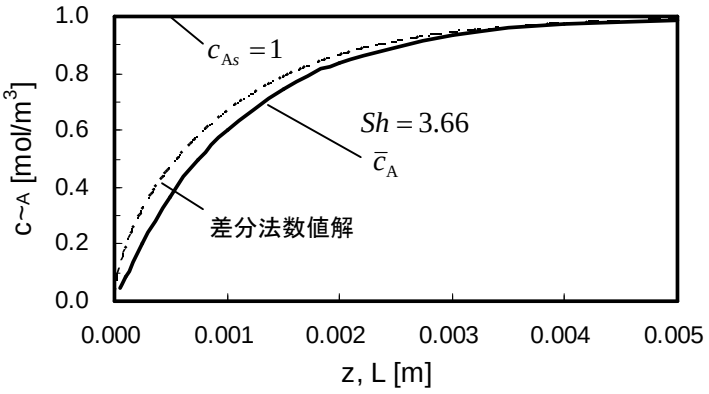


図 3.21 管内流れにおける混合平均濃度の変化（差分解は例題 2.24 ）<diff27.xls>

【例題 3. 6】円管内流れへの壁からの溶解実験<diff27.xls>（解説）

Linton-Sherwood は安息香酸で作った円管に水を流して，安息香酸の溶解速度を測定する実験をおこなった。上流に 4 m の管を設けて，円管内は発達した放物線速度分布になるようにしている。円管内径 D= 0.0523 m，全長 L= 0.32 m，水流速 $\bar{u} = 0.0017$ m/s，ReD=100，安息香酸-水系拡散係数 $D_{AB} = 9.18 \times 10^{-10}$ m^2/s，Sc=970,である。安息香酸の水への飽和溶解度として壁

面濃度を推定すると，$c_{As} = 27.8\,\mathrm{mol/m^3}$である。円管出口での平均濃度を求めよ[3, p. 97)]。

（解）式(3.66)，式(3.67),式(3.74)より以下のようである。

$$Gz \equiv (D/L)\mathrm{Re}_D\, Sc = 15853,\ Sh = 3.66 + \frac{0.0668\times 15853}{1+0.04\times(15853)^{2/3}} = 44.0$$

$$\bar{c}_{\mathrm{A}} = 27.8 - \frac{(27.8-0)}{\exp\left(\dfrac{4\times 44\times 0.32\times 9.18\times 10^{-10}}{0.0523^2\times 0.0017}\right)} = 0.307\,\mathrm{mol/m^3}$$

出口濃度は未だ飽和濃度に比べて1%程度である。

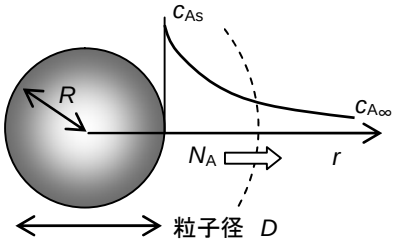


図 3.22 球表面から静止媒体への物質移動（拡散）

球状物体からの流体への物質移動：径$D(=2R)$の球表面から外側媒体中への拡散を考える。外部媒体中の球中心からの距離rにおける，球表面からの物質移動流束（拡散流束）N_A [mol/m^2-s]は拡散面積（径rの球の表面積）との積が一定である。これをV_A [mol/s]とする。

$$V_A(=4\pi r^2 N_A) = -4\pi r^2 D_{AB}\frac{dc_A}{dr}(=const.) \qquad (3.75)$$

境界条件は，$r = R : c_A = c_{As}, r = \infty : c_A = c_{A\infty}$なので，これより$V_A = 4\pi D_{AB}R(c_{As} - c_{A\infty})$ (3.76)

である。よって，

$$Sh \equiv \frac{N_A}{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})/D} = 2 \qquad (3.77)$$

の関係が得られる。

これをもとに，媒体に流速 u の流れがある場合には$\mathrm{Re} = uD/\nu$として，伝熱の Nu 数の実験式（Ranz-Marshall の式）のアナロジーにより以下で表せる[5, p. 434)]。

$$Sh = 2 + 0.6\,\mathrm{Re}^{1/2}\,Sc^{1/3} \qquad (3.78)$$

この式は係数 0.6 を 0.552 に変えて，Fröessling の式とも呼ばれる[4, p. 194)]。

$\mathrm{Re} > 2000$以上の乱流範囲では次式で近似できる[4, p. 194)]。

$$Sh = 0.347\,\mathrm{Re}^{0.62}\,Sc^{0.31} \qquad (3.79)$$

これらの関係を Sc=1 とした場合について図 3.24 に示す。

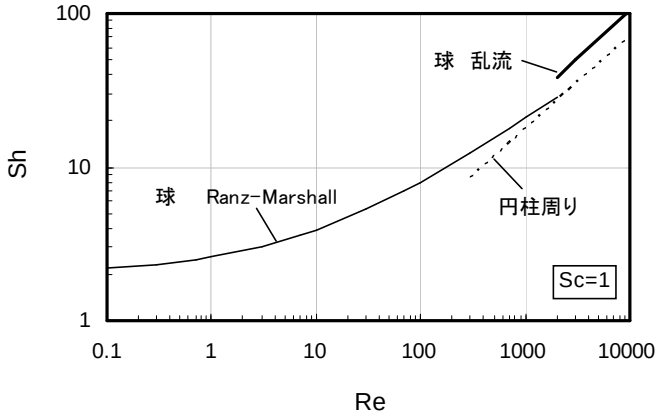


図 3.23 球および円柱からの物質移動

以上は Sc 数が 1 近辺の気体流れについて適用されるが，$Pe = \mathrm{Re}\cdot Sc > 10{,}000$の液相については Levich の式が適用される[6, p. 575)]。

$$Sh = 1.01Pe^{1/3} = 1.01\,\mathrm{Re}^{1/3}\,Sc^{1/3} \qquad (3.80)$$

【例題 3.7】落下水滴の蒸発時間－物質移動からの解法－<dry15.xls>

水蒸気濃度$c_{A\infty} = 0.505\,\mathrm{mol/m^3}$(温度 T =135℃，湿度 H =0.015 kg/kg)の空気中を，滴径 D = 1.3 mm の水滴を落下させる。水滴表面水蒸気濃度$c_{As} = 3.5\,\mathrm{mol/m^3}$（$T_s$= 42.6 ℃，$H_s$

=0.0568 kg/kg(湿球温度))として，全蒸発時間を求めよ。必要な物性値(拡散係数 D_{AB}，空気密度 ρ，水滴密度 ρ l,空気の粘度 μ ,空気のシュミット数 Sc 等)は図 3.25 のシート中に示す。

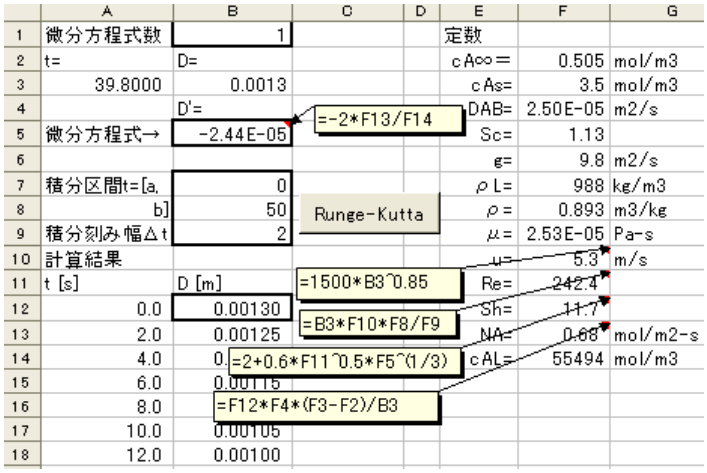
(解)水滴からの蒸発速度を N_A [mol/(m^2 s)]とすると滴径 D の経時変化は次式である。

$$d(\pi D^3 c_{AL}/6)/dt = -\pi D^2 N_A$$

N_A は Ranz-Marshall 式(式(3.78))から計算する。ここで Re 数に必要な終末速度 u [m/s]は，別途計算の上，$u = 1500D^{0.85}(2 < \mathrm{Re} < 242)$ の相関式を用いた。(<dry15.xls>中に示す。)これらより滴径変化をあらわす微分方程式が次式となる。($d(D^3) = 3D^2 d(D)$)

$$\frac{d(D)}{dt} = -\frac{2}{c_{AL}} N_A = -\frac{2}{c_{AL}} \frac{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})}{D}(2.0 + 0.60 Sc^{1/3}\,\mathrm{Re}^{1/2})$$

図 3.25 が「微分方程式解法シート」である。定数および u, Re の計算を G 列に記述し，セル B5 に上の微分方程式を記述する。積分区間，刻み幅を設定して，ボタンクリックで積分を実行する。D =0 になるまでが蒸発時間である。(そこで計算実行エラーとなりプログラムが停止する。)よって全蒸発時間が t =38 s と得られた。(図 3.26)この間の落下距離は約 49 m である。



	A	B	C	D	E	F	G
1	微分方程式数	1			定数		
2	t=	D=			cA∞=	0.505	mol/m3
3	39.8000	0.0013			cAs=	3.5	mol/m3
4		D'=	=-2*F13/F14		DAB=	2.50E-05	m2/s
5	微分方程式→	-2.44E-05			Sc=	1.13	
6					g=	9.8	m2/s
7	積分区間t=[a,	0			ρL=	988	kg/m3
8	b]	50	Runge-Kutta		ρ=	0.893	m3/kg
9	積分刻み幅Δt	2			μ=	2.53E-05	Pa-s
10	計算結果				u=	5.3	m/s
11	t [s]	D [m]	=1500*B3^0.85		Re=	242.4	
12	0.0	0.00130			Sh=	11.7	
13	2.0	0.00125	=B3*F10*F8/F9		NA=	0.68	mol/m2-s
14	4.0	0.	=2+0.6*F11^0.5*F5^(1/3)		cAL=	55494	mol/m3
15	6.0	0.00115					
16	8.0	=F12*F4*(F3-F2)/B3					
17	10.0	0.00105					
18	12.0	0.00100					

図 3.24 水滴の蒸発時間計算シート<dry15.xls>

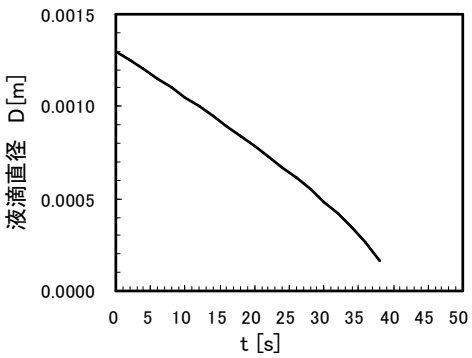


図 3.25 水滴蒸発の様子<dry15.xls>

円柱周り流れ:径 D の円柱に直角な流れが横切る場合は，伝熱分野において数多くの相関式が提案されている。ここでは Bedingfield-Drew の相関式 [6, p. 578]を挙げる。気相では次式である。

$$Sh = 0.281\mathrm{Re}_D^{1/2} Sc^{0.44},\ 400 < \mathrm{Re}_D < 25{,}000, 0.6 < Sc < 2.6 \quad (3.81)$$

図 324 に球の相関式と比較した。また，液相では次式が適用される。

$$Sh = 0.281\mathrm{Re}_D^{0.6} Sc^{1/3}\ 400 < \mathrm{Re}_D < 25{,}000,\ Sc < 3{,}000 \quad (3.82)$$

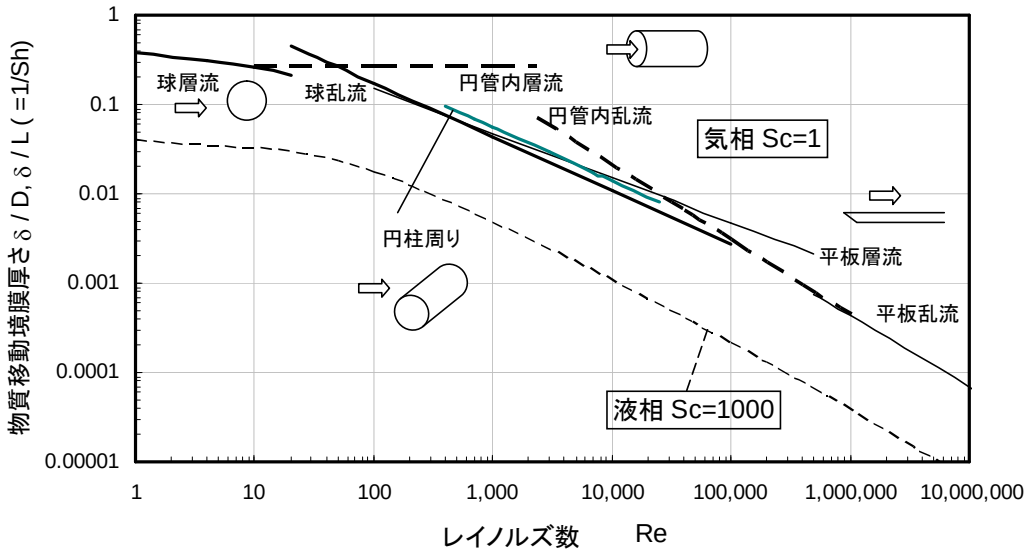


図 3.26 各種形状物質移動(層流, 乱流)における物質移動境膜厚さの比較<diff40.xls>

以上の基本的な4つの物質移動形態について, 各 Sh 数の逆数をとり, 境膜厚さと代表長さの比($\delta/D, \delta/L$)として図 3.27 で比較した。これは Sc=1 の気相についての概略の境膜厚さである。どの物質移動形態も同様の傾向を示しており, Re の小さい層流範囲では δ は代表長さの数分の 1, 流れが速くなると 1/100～1/1000 程度に薄くなる。液相の場合は Sc=1000 程度なので, 境膜厚さ δ は気相の 1/10～1/20 となる。

3.5 伝熱係数の推算式, 相関式

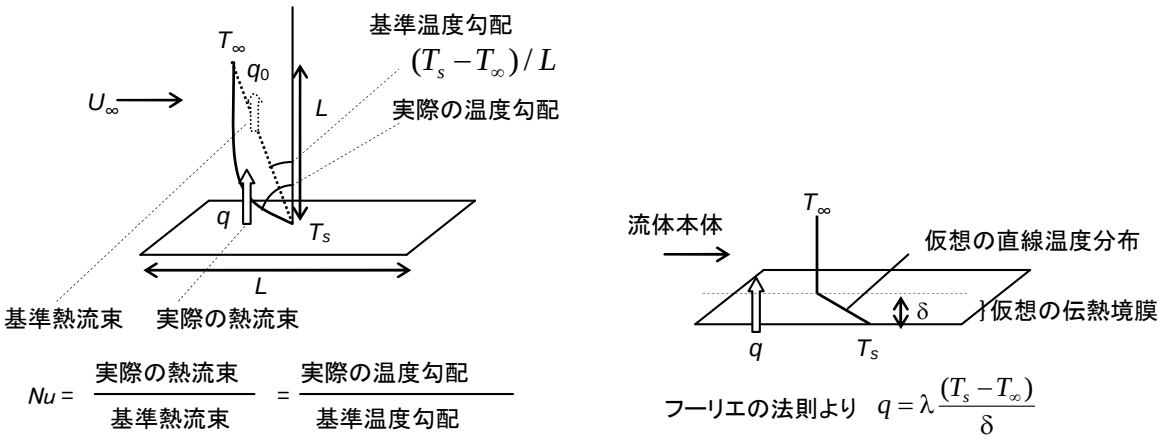
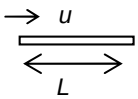
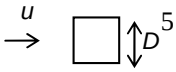
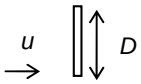
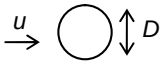


図 3.27 ヌッセルト数 Nu と伝熱係数 h の意味

例えば 4 章の乾燥操作は加熱による伝熱量が蒸発潜熱を通じて物質移動を引き起こす。このように多くの物質移動現象は伝熱現象と相互に関連している。図 3.28 は図 3.4 の Sh 数との関連で Nu 数及び伝熱係数 h($Nu = hL/\lambda$)(L:代表長さ, λ:媒体熱伝導度) の意味を示したものである。表 3 に強制対流伝熱条件下の各種形状物体周りの流れについて, Nu 数と空気系における伝熱係数(式(3.1))の推算式, 相関式を示す。多くの式はこの章で示した物質移動に関する推算・相関式と共通のものである。これらの相関式は 4 章で利用する。

表 3.3　物体まわりの強制対流伝熱－Nu 数および空気系の伝熱係数 h－

（空気は 30℃として，λ =0.0263 W/m-K，ν =1.59×10^{-5} m^2/s，Pr=0.717 とした。）

形状	(u は代表速度)	*Re*	*Nu*	空気系の *h* [W/(m^2-K)]	
平板上		層流 $\mathrm{Re}_L < 5\times10^5$	$Nu = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$	$h = 3.92(u/L)^{1/2}$	(b)
		乱流 $5\times10^5 < \mathrm{Re}_L < 10^7$	$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$	$h = 6.0(u^{0.8}/L^{0.2})$	(a)
円柱		40-4000	$Nu = 0.683\,\mathrm{Re}_D^{0.466}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$	$h = 2.77u^{0.466}D^{0.534}$	
角柱		5×10^3-10^5	$Nu = 0.102\,\mathrm{Re}_D^{0.675}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$	$h = 4.16u^{0.675}D^{0.325}$	
板		4×10^3-1.5×10^4	$Nu = 0.228\,\mathrm{Re}_D^{0.731}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$	$h = 17.3u^{0.731}D^{0.269}$	
球		$Nu = 2 + 0.6\,\mathrm{Re}_D^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ (Ranz-Marshall の式)	(c)	$h = 3.5(uD)^{1/2}$	

3章　参考文献

1)Mackay, D.: Multimedia Environmental Models, The fugacity approach, 2nd edition, Lewis Publisher (2001).

2) Becker, H.A. :Dimensionless Parameters-Theory and Methodology-, Applied Science Publishers Ltd. (1976).

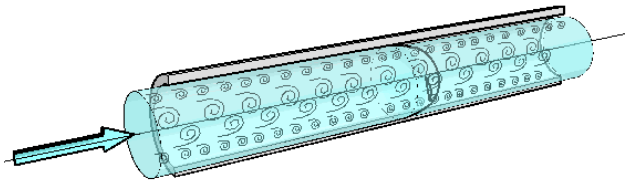
3) J.D. Sender, E.J. Henley, Separation Process Principles, Second Edition, John Wiley & Suns, Inc., (2006)

4) A.L. Hines and R.N. Maddox: Mass Transfer, Fundamentals and Applications, Prentice-Hall, Inc. (1985)

5) F.P. Incropera and D.P. Dewitt, T.L. Bergman, A.S. Lavine: Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 6th edition, John Wiley & Suns, Inc. (2007)

6) J.R. Welty, C.E. Wicks, R.E. Wilson, G.L. Rorrer: Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer, 5th edition, John Wiley & Suns, Inc (2008)

（補足事項）円管内流れ（層流・乱流）の圧力損失



ベルヌーイの式で摩擦エネルギー損失 Ff から摩擦係数 (friction factor) *f* という無次元数を次式: :

$$F_f = 4f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right) = \frac{2fL\bar{u}^2}{D}$$

で定義する。$F_f = \dfrac{\Delta P}{\rho}$ なので、$f \equiv \dfrac{D\Delta P}{2\rho L\bar{u}^2}$　である。本式をファニングの式(Fanning's equation)という。　*f* は円管の場合特にファニングの管摩擦係数(Fanning's friction factor)と呼ぶ。（C_f であらわす場合も多い。）*f* の移動論的意味は壁面におけるせん断応力 τ_w を平均速度 *u* に対する動圧で無次

元化したものである。

$$f = \frac{\text{せん断力}}{\text{流入運動エネルギー}} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2}$$

（τ_wと圧力損失の関係（管壁でのせん断力と管入り口出口の圧力のつりあい式）：

$\pi r_0^2(P_1 - P_2) = 2\pi r_0 L\tau_w$から、$\tau_w = \frac{r_0\Delta P}{2L} = \frac{D\Delta P}{4L}$であり、fの定義式が得られる。）

なお、機械工学関係ではダルシーの管摩擦係数(Darcy's friction factor) λ： $\lambda = 4f$ も使用される。

実用的には無次元数である摩擦係数 f を決めると F_f⇒圧力損失 ΔP⇒損失ヘッド、が計算できる。

先の円管内流れに関する次元解析の結果より、$2(\frac{\Delta PD}{2\rho u^2 l}) = k(\frac{\rho uD}{\mu})^{-d}$ すなわち、$2f = k\,\mathrm{Re}^{-d}$ であった。よって、f を Re の関数としてあらわしておけば、無次元数間の関係なのでスケールを問わずその関係が使えるはずである。

管内流れが層流の場合は圧力損失は理論的に導かれ、管内の平均流速を使うと、

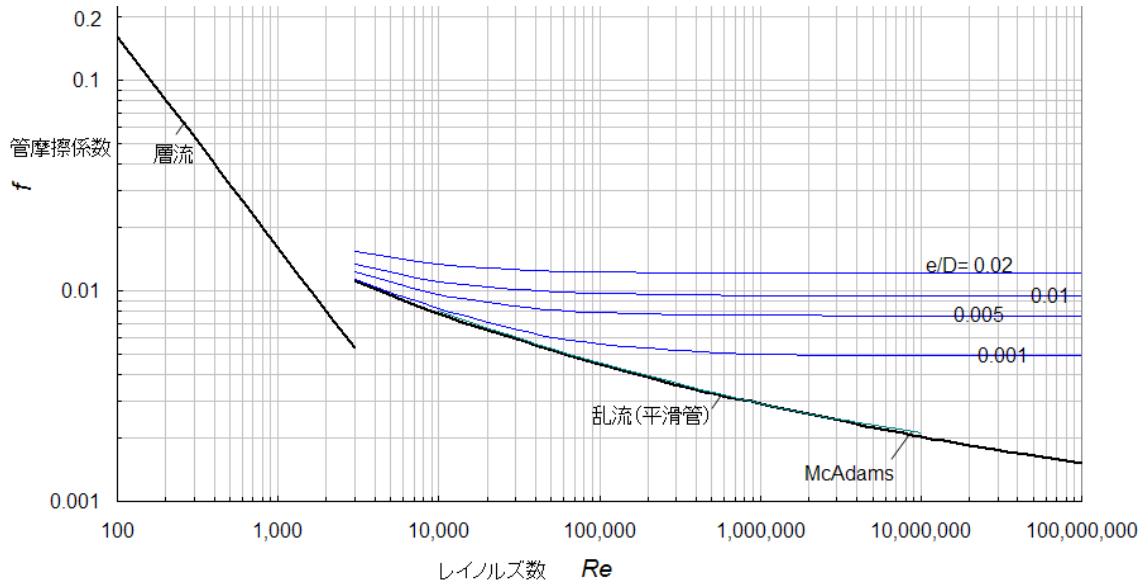
$$F_f = \frac{\Delta P_f}{\rho} = \frac{32\mu L\bar{u}}{\rho D^2}$$

である。これは層流範囲の圧力損失を表わす理論式で、ハーゲンーポアズイユ(Hagen-Poiseuille)の式と呼ばれる。実測値とよく一致し、粘度測定の基礎式としても用いられる。摩擦係数では、

$$f = \frac{16}{\mathrm{Re}} \quad \text{または}\ \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}\ \text{となる。}$$

乱流範囲では半理論式であるカルマンの式：$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0\log(\mathrm{Re}\sqrt{f}) - 0.4$

が用いられる。適用範囲は $3\times10^3<\mathrm{Re}<3\times10^6$。この式は f について陰関数なので、実際の摩擦係数の計算には試行法が必要であり使いにくい。しかしこの式の誘導理論を尊重してこの形式で書かれている。



この関係の近似式としては次式がある。

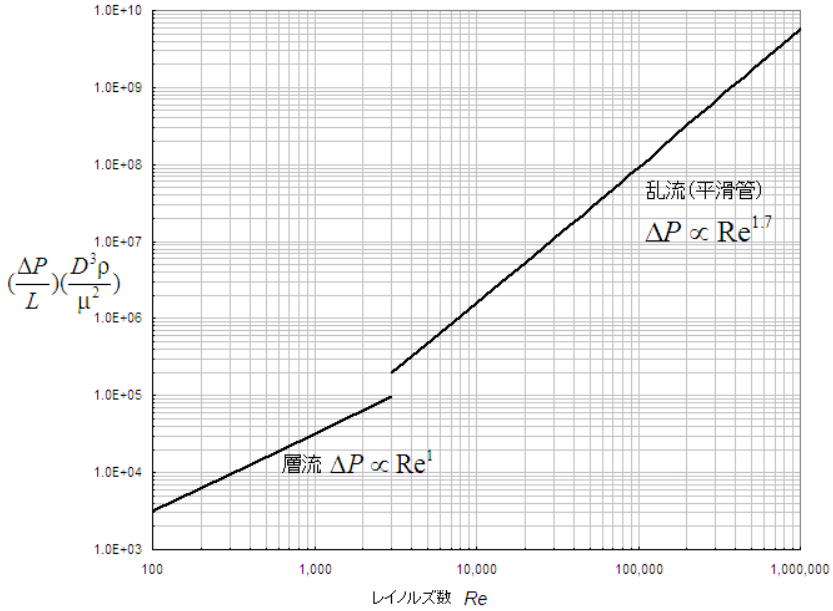
$$f = 0.046\,\mathrm{Re}^{-0.2} \quad (1\times10^5 < \mathrm{Re} < 1\times10^6)$$

他に Drew, Koo, McAdams 式： $f = 0.00140 + 0.125\,\mathrm{Re}^{-0.32}$ $(1\times10^4 < \mathrm{Re} < 1\times10^7)$

Blasius の式（実験式）： $f = 0.0791\,\mathrm{Re}^{-0.25}$ $(Re < 10^5)$

がある。以上により管内流れで Re (u) がわかれば， $(\frac{\Delta P}{L}) = \frac{2 f \bar{u}^2}{D}$ で圧力損失が求められる。なお，

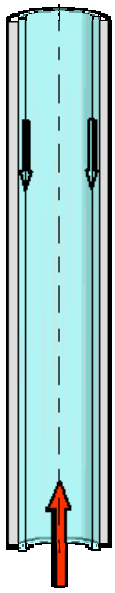
この式より $(\frac{\Delta P}{L})(\frac{D^3\rho}{\mu^2}) = 2 f\,\mathrm{Re}^2$ であるから，層流では $\Delta P \propto \mathrm{Re}^1$，乱流では $\Delta P \propto \mathrm{Re}^{1.7}$ である。（下図）



【Excel 演習レポート 7】例題 3.7 落下水滴<dry15_temp.xls>を完成して，1 ページ目のみプリントして提出。

【筆記演習レポート 7】

Reynolds のアナロジー式： $\frac{f}{2} \equiv St_M \equiv \frac{Sh}{\mathrm{Re}\,Sc}$

を用いて，内径 D= 0.01 m，長さ 50 cm の円管ぬれ壁塔(蒸発面積 A=0.0157 m^2)から，平均流速 u= 10 m/s の空気流れ中への水の蒸発速度[g/h]を推定せよ。空気の ρ =1.3 kg/m^3，粘度 μ =1.7×10^{-5} Pa-s,より Re= 7650 である。D_{AB}=2.56x10^{-5} m^2/s, Sc= 0.5，水蒸気濃度推進力 $\Delta c_A = c_{As} - c_{A\infty} = 1.0\ \mathrm{mol/m^3}$ とする。

（ヒント：レイノルズ数 Re→（f の線図）→f→St_M→ $Sh \equiv \frac{N_A}{(D_{AB}\Delta c_A / D)}$ →物質移動流束 N_A [mol/m^2-s]→蒸発速度 $N_A A$ [mol/s]→[g/h]）