

移動論第三 2012 伊東

10/4 第 1 回 拡散方程式 定常拡散

10/11 第 2 回 静止媒体中の非定常拡散

10/18 第 3 回 対流物質移動 1次元

10/25 第 4 回 対流物質移動 2次元

11/1 第 5 回 反応を伴う拡散

■11/8 第 6 回 物質移動係数と境界層理論

11/15 第 7 回 アナロジーと各種形状物質移動

11/22 第 8 回 分離プロセスの基礎 乾燥と湿球温度

11/29 第 9 回 吸着・クロマト

12/6 第 10 回 微分接触プロセス

(下山担当分)

12/13 第 11 回 蒸気圧

12/20 第 12 回 相平衡と溶解度(1)

1/10 第 13 回 相平衡と溶解度(2)

1/24 第 14 回 輸送物性(1)

1/31 第 15 回 輸送物性(2)

2/7 期末試験(S421 講義室)

担当教官:(前半)伊東 章 S1 421
(後半)下山裕介 S1 411

木曜 3,4 限(10:45-12:15) S421 講義室
実習は情報ネットワーク演習室第 1(D)(S4 3F)

伊東回は毎回演習レポート(手書きおよびプリントアウト)を課します。講義時間内に提出のこと。
(講義時間内に提出できなかった場合のメ切は当日 17:00, 提出は南 1 421 伊東居室前の Box へ。)

演習・実習用の Excel シートテンプレートファイルは以下にあります。当日のフォルダ“tp3_”をデスクトップにコピーして使ってください。

1. [エクスプローラ]
2. “¥¥nest2.g.sic.titech.ac.jp¥home0”を入力
3. “usr2/ito-a-ac/”に入る

3.1 物質移動係数と物質移動の無次元数

3.1.1 物質移動係数と伝熱係数

熱の移動は伝導伝熱(conduction), 対流伝熱(熱伝達)(convection), 輻射伝熱(radiation)の 3 形態で取り扱われる。このうち固体-流体間の主たる伝熱形態が対流伝熱である。対流伝熱では熱流束 $\dot{q}[\text{W}/\text{m}^2 \equiv \text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ を材料表面温度を T_s , 流体主流温度を T_∞ 間の温度差を用いて次式で表す。 $\dot{q} = h(T_s - T_\infty)$ (3.1)

これが対流伝熱に関するニュートンの冷却法則(Newton's law of cooling)である。この式で伝熱係数(熱伝達率)(Heat transfer coefficient) $h[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ が定義される。一方, 材料表面上の流体に厚さ $\delta_H[\text{m}]$ の伝熱境膜を仮想して, この境膜に固体平板と同様にフーリエの伝導伝熱の法則を適用すると,

$$\dot{q} = \lambda \frac{(T_s - T_\infty)}{\delta_H} \quad (3.2)$$

となる。(図 3.1) $\lambda[\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$ は流体の熱伝導度で, 物性値である。両式の比較から(境膜)伝熱係数 h と伝熱境膜厚さ δ_H は $h = (\lambda / \delta_H)$ の関係にあることがわかる。

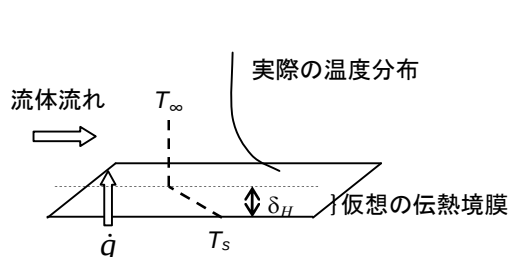


図 3.1 対流伝熱と伝熱境膜

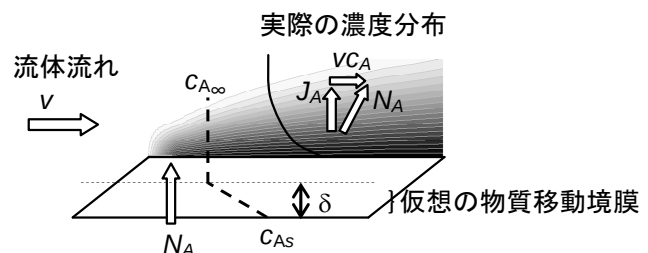


図 3.2 物質移動流束と物質移動境膜

物質移動も対流伝熱と類似の物質移動境膜のモデルで考えることができる。(図 3.2)例えば蒸発現象のように、物質移動は異相界面と流体間で主に生じる。そこで界面に接した流体内に厚さ δ の物質移動境膜を考え、界面濃度 c_{As} と流れ本体の成分濃度 $c_{A\infty}$ の差を濃度推進力として、物質移動流束 N_A を次式で表す。

$$N_A = k(c_{As} - c_{A\infty}) = \frac{D_{AB}}{\delta}(c_{As} - c_{A\infty}) \quad (3.3)$$

この境膜モデルにより境膜物質移動係数 k が定義された。伝熱係数 h と同様に、物質移動係数 k も拡散係数 D_{AB} と境膜厚さ δ の比の意味を持つ。物質移動境膜の厚さ δ は実態のあるものであり、以下の例題にもあるように、気相では 2 mm～20 mm、液相では 20 μm ～200 μm 程度である。

伝熱係数はその定義・単位 (SI) がひとつ ($h[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$) であった。これに対して物質移動では流束 N_A と濃度の表示に種々の単位があるため、物質移動係数 k には多くの定義と単位が生じる。表 3.1 には物質移動流束がモル基準の場合 ($N_A[\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$) に限り、濃度の異なる基準から由来する各種物質移動係数の定義と単位および物質移動境膜厚さ δ [m]間の関係を示す。

表 3.1 各種物質移動係数 (モル基準のみ)

基準となる濃度 定義式		物質移動係数の単位
モル濃度基準: $c_A[\text{mol}/\text{m}^3]$	$N_A = k(c_{Ai} - c_{A\infty}) = \frac{D_{AB}}{\delta}(c_{Ai} - c_{A\infty})$	$k[\text{m}/\text{s}] \quad (3.4)$
分圧基準: $p_A[\text{kPa}]$	$N_A = k_G(p_{Ai} - p_{A\infty}) = \frac{D_{AB}}{\delta} \frac{1}{RT}(p_{Ai} - p_{A\infty}) \quad k_G[\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{kPa}}]$	
(3.5)($R[\text{m}^3 \cdot \text{kPa}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$: 気体定数, $T[\text{K}]$: 温度)		
気相モル分率基準: $y[-]$	$N_A = k_y(y - y_i) = \frac{D_{AB}}{\delta} \frac{\pi}{RT}(y - y_i)$	$k_y[\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}]$
(3.6)($\pi[\text{kPa}]$: 全圧)		
液相モル分率基準: $x[-]$	$N_A = k_x(x_i - x) = \frac{D_{AB}}{\delta} C(x_i - x)$	$k_x[\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}]$
(3.7)($C[\text{mol}/\text{m}^3]$: 全モル濃度)		

これらに加えて質量基準の物質移動流束 ($N_A^*[\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$) 等を用いると、さらに多くの物質移動係数の定義が存在する。本書ではできるだけモル濃度基準の $k[\text{m}/\text{s}]$ を推奨し、本文で用いる。しかし、単位操作毎に普通に用いられている定義はそれを使用する。(例えば吸収操作の解析ではモル分率基準の物質移動係数 k_y, k_x を用いる。)

【例題 3.1】環境問題の物質移動係数

環境動態解析の分野において CO_2 や VOC(ベンゼン等)成分の水表面間-大気間の物質移動について、「一般的な値」としてガス(空気)側物質移動係数は 3 m/h(=0.00083 m/s), 液(水)側物質移動係数は 0.03 m/h(=8.3 $\times 10^{-6}$ m/s)が示されている¹⁾。境膜厚さ δ を求めよ。

(解) CO_2 で考えると、空気中の拡散係数 $D_{ABG} = 0.177 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, 水中の拡散係数 $D_{ABL} = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ である。 $\delta = (D_{AB}/k)$ から各々境膜厚さを求めると、空気側が $\delta_G = 21 \text{ mm}$, 水側が $\delta_L = 240 \text{ }\mu\text{m}$ である。

3.1.2 次元解析による物質移動関係の無次元数の導出

移動論では汎用性を持たせるためにレイノルズ数 Re などの無次元数で相関式等を表す。ここでは次元解析により物質移動解析に用いられる無次元数を導く。

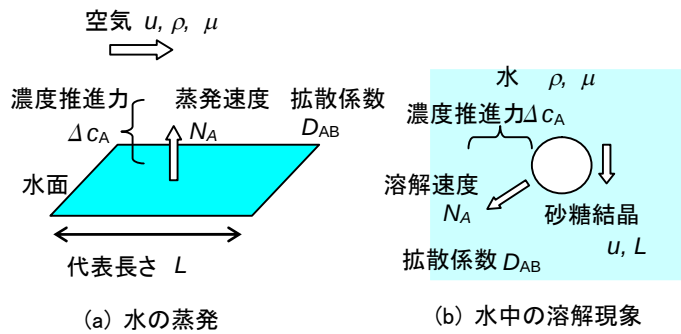


図 3.3 物質移動流束と物質移動境膜

水の蒸発や砂糖の溶解現象は物質移動の問題である。(図 3.3)これらの現象における物質移動流束 N_A [mol/(m²・s)] に関与する物理量は、濃度差 Δc_A [mol/m³], 拡散係数 D_{AB} [m²/s], 速度 u [m/s], 流体の密度 ρ [kg/m³], 粘性係数 μ [kg/(m・s)], 代表長さ L [m] である。物理量が 7 個で次元が mol, M, L, T の 4 つであるから, π 定理により, 関係する無次元数の数は 3 であると予想できる。

いま N_A が,

$$N_A = k \Delta c_A^a D_{AB}^b u^c \rho^d \mu^e L^f \quad (3.8)$$

であらわせるとする。次元に関しても等式:

$$[\text{mol}^1 \text{L}^{-2} \text{T}^{-1}] = \boxed{\phantom{\text{mol}^1 \text{L}^{-2} \text{T}^{-1}}} \quad (3.9)$$

が成立する。よって、次元 mol に関して、

M に関して、

L に関して、

T に関して、

が成立する。 c と e と残して他をこれらであらわすと、

である。よって、

$$N_A = \boxed{} \quad (3.10)$$

すなわち次の無次元の関係式となる。

$$\frac{N_A}{D_{AB}(\Delta c_A / L)} = k \left(\frac{uL}{D_{AB}} \right)^c \left(\frac{\mu}{D_{AB}\rho} \right)^e \quad (3.11)$$

ここであらわれた 3 つの無次元数は順にシャーウッド数 Sh , ペクレ数 Pe , シュミット数 Sc と呼ばれ, これらが物質移動現象解析に用いられる無次元数である。よって物質移動問題は次元解析の結果より,

$$Sh = k Pe^c Sc^e \quad (3.12)$$

と一般に表せた。

実際に例えば球形固体(砂糖)の水への溶解速度は実験的に、 $Sh = 1.01 Pe^{1/3}$ (3.13)

と予測される。(後述)(ただし, $Sc \gg 1$ とする。)さらに、 $Pe = Re Sc$ ($\frac{uL}{D_{AB}} = \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right) \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)$) なので上

$$\text{式は, } Sh = k Re^c Sc^{e+c} \quad (3.14)$$

ともあらわせる。実際, 平板からの物質移動は境界層理論から後述の式(3.38)となっている。物質移動問題は Sh , Re , Sc で相関される場合が多い。

以上で導かれた各無次元数の意味を紹介する。レイノルズ数 Re は速度 u で流れる流体にかかる慣性力と粘性力の比である。シュミット数 Sc は流体の物性値であり、特殊な無次元数である。流体の粘性（運動量移動の比例定数）と物質移動の比例定数である拡散係数の比の意味を持つ。

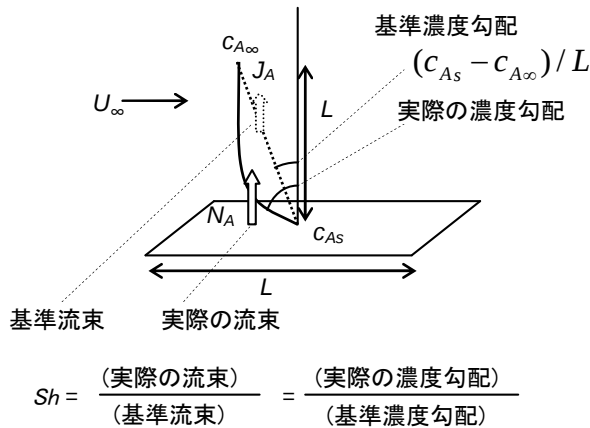


図 3.4 シャーウッド数 Sh の意味

シャーウッド数 Sh は物質移動流束 N_A を無次元化したものである。 Sh 数の分母は濃度差と代表

$$\text{距離 } L \text{ による拡散流束: } J_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dy} = D_{AB} \frac{(c_{As} - c_{A\infty})}{L} \quad (3.15)$$

であり、これは流れの条件に依らず定義できる。 Sh 数はこの基準流束 J_A に対して実際の物質移動流束 N_A (拡散流束と対流の合計) が何倍かを表している。(図 3.4) 界面では対流項がないので、 Sh 数は実際の濃度勾配が基準の濃度勾配 $((c_{As} - c_{A\infty})/L)$ の何倍かを示していることになる。

また、 Sh 数の定義に物質移動係数の定義(式(3.4))を考慮すると次式であり、物質移動係数 k を無次元化した $Sh = kL/D_{AB}$ もまた Sh 数の定義となる。

$$Sh \equiv \frac{N_A}{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})/L} = \frac{k(c_{As} - c_{A\infty})}{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})/L} = \frac{kL}{D_{AB}} = \frac{L}{\delta} \quad (3.16)$$

さらに界面に厚さ δ の物質移動境膜を考えると、最終的に $Sh = L/\delta$ であり、 Sh 数は代表長さ L と境膜厚さ δ の比の意味をもつことがわかる。

3.1.3 流束の比としての無次元数

前項のように無次元数は普通「次元解析」により導かれる。しかしこれとは別の視点すなわち流束(Flux)の比として解釈・定義すると、無次元数の物理的意味が明確となる。**Backer**²⁾は移動論(流体力学, 伝熱工学, 物質移動論)で用いられる多数の無次元数について、各種流束の比としての説明を与えている。ここでは物質移動における無次元数について紹介する。

図 2.5 に円管内の流れと平板上の流れについて、検査体積に流入・流出する各種物質流束(単位は $[\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$)を示す。代表長さを L , 代表濃度推進力を Δc_A , 主流流れの流速を u とすると、これらを用いて、主流流れによる対流流束を $u\Delta c_A$, 拡散流束を $J_A = D_{AB}\Delta c_A/L$, 物質移動流束を $N_A = k\Delta c_A$ で測ることができる。これらは各流束の「尺度(measure)」である。表 3.2 にこれらの尺度を用い、各流束の比として、物質移動の無次元数の意味を示した。例えば主流による対流物質移動に対して、拡散流束との比が Pe 数であり、物質移動流束との比が St 数である。

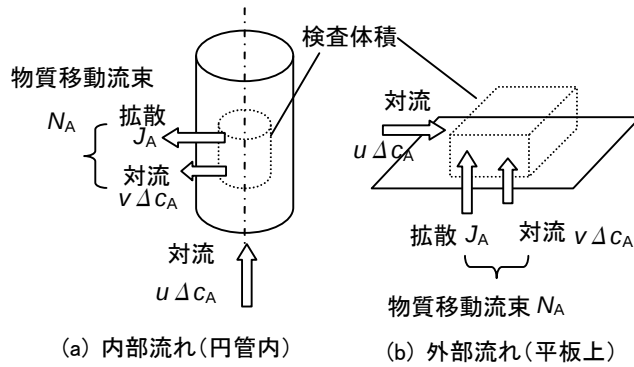


図5 物質移動の各種流束

表 3.2 物質移動の無次元数

	拡散流束 $J_A = \frac{D_{AB}\Delta c_A}{L}$	物質移動流束 $N_A = \frac{D_{AB}\Delta c_A}{L}$
対流物質移動 $u\Delta c_A$	ペクレ数 $Pe \equiv \frac{uL}{D_{AB}}$	スタントン数 $St \equiv \frac{k}{u}$
拡散流束 $J_A = \frac{D_{AB}\Delta c_A}{L}$		シャーウッド数 $Sh \equiv \frac{kL}{D_{AB}}$

3.2 平板上の層流境界層と物質移動

次節で各種形状(平板, 球, 管内)や流れの状態(層流, 乱流)における物質移動の理論式, 推算式を示してゆくが, それらの基礎となるのが平板面から平行流れへの物質移動解析である。

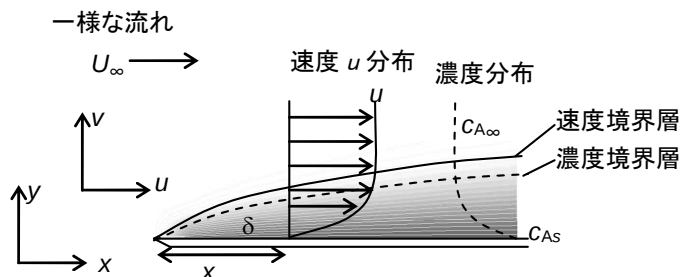


図 3.6 平板上の速度境界層と濃度境界層

一様流れに平行に置かれた平板面上の速度, 濃度分布を考える。(図 3.6) 平板面上の拡散成分濃度が c_{As} , 流れ中の濃度が $c_{A\infty}$ として, 面上から流れ方向への物質移動が生じているものとする。速度, 濃度分布は平板の薄い層状部分に限られるので, これを厚さ δ の境界層とみなす。すると流れの代表長さ L (または x) に比較して境界層厚さ δ は十分小さい ($\delta \ll L$) と考えられる。これをもとに直交座標 2 次元 (x, y) ナビエーストークス式にオーダー比較をおこなって, 適宜各項を省略することで, 層流境界層方程式が次式となる。

$$\text{速度: } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

$$(\nu \equiv \frac{\mu}{\rho} : \text{動粘度} [\text{m}^2/\text{s}]) \text{これと連続の式: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

により境界層内の速度場 (u, v) が解かれる。

また, 成分モル濃度 $c_A [\text{mol}/\text{m}^3]$ に関する拡散の基礎式 (2.1) に同様に境界層の近似を適用す

ると次式の濃度境界層方程式となる。

$$A \text{ 成分濃度: } u \frac{\partial c_A}{\partial x} + v \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \left[\frac{\text{mol}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right] \quad (3.19)$$

ここで、速度の境界層における u, v は通常の(質量基準の)流体速度だが、濃度境界層方程式はモル濃度 c_A に関してのものであるので、ここでの u, v は厳密にはモル平均速度である。しかし拡散成分と媒体のモル密度(分子量)があまり変わらないものとして、近似的に両者を同じ量として取り扱うのが普通である。

これらの偏微分方程式を解くために先ず常微分方程式に変換する。これをブラジウスの相似変形という。 y 方向距離を境界層の厚さ δ で規格化して相似変数 η ($\eta = y/\delta$) とする。境界層厚さ

$$\delta \text{ は } x \text{ 方向に変化し, } \delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \text{ とするのが妥当である。よって, } \eta \equiv y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (3.20)$$

である。次に、連続の式(3.18)を自動的に満足する関数(流れ関数) ψ :

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.21)$$

を導入してこれを次式のように無次元流れ関数 $f(\eta)$ で無次元化する。 $\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$ (3.22)

また、濃度については無次元濃度 $\theta(\eta) \equiv \frac{c_A - c_{As}}{c_{A\infty} - c_{As}}$ を用いる。

すると元の境界層方程式の各項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad u = \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)] = \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \frac{df}{d\eta} = U_\infty f', \\ v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\eta U_\infty}{2x} f'', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty^2}{\nu x} f''', \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= (c_\infty - c_s) \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}\right) \theta', \quad \frac{\partial c}{\partial y} = (c_\infty - c_s) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \theta', \quad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = (c_\infty - c_s) \frac{U_\infty}{\nu x} \theta'' \end{aligned} \quad (3.23)$$

以上により境界層方程式は次式のように常微分方程式となる。

$$\text{速度の境界層方程式: } 2f''' + ff'' = 0 \quad (3.24)$$

(境界条件: $\eta = 0: f = f' = 0$ および $\eta = \infty: f' = 1$)

$$\text{濃度の境界層方程式: } \theta'' + \frac{Sc}{2} f \theta' = 0 \quad (3.25) \quad (Sc \equiv \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} : \text{シュミット数})$$

(境界条件: $\eta = 0: \theta = 0$ および $\eta = \infty: \theta = 1$)

x - y 2次元の境界層方程式は無次元距離 η に関する常微分方程式に変形された。しかし未だ3階の常微分方程式であり、解析解は得られない。この常微分方程式を近似的に解くためにブラジウス以来、級数解法を中心に特別な解法が工夫されてきた。しかし、今日ではパソコンにより以下のような数値解法で手軽に解くことができる。

ここでは Runge-Kutta 法による数値積分法を用いる。式(3.24), (3.25)で

$y_0 = f, y_1 = f', y_2 = f'', y_3 = \theta, y_4 = \theta'$ と置くとこれらは以下の正規形の連立常微分方程式となる。

$$\begin{cases} y_0' = y_1 & (3.26) \\ y_1' = y_2 & (3.27) \\ y_2' = -(1/2)y_0 y_2 & (3.28) \\ y_3' = y_4 & (3.29) \\ y_4' = -(Sc/2)y_0 y_4 & (3.30) \end{cases}$$

以下の例題でこの方法による速度・濃度の境界層方程式の数値解法を示す。

【例題 3.2】平板上の濃度境界層方程式の数値解法<diff10.xls>(<diff10_temp.xls>で実習)

水面からの水の蒸発を想定して, $U_\infty = 0.3 \text{ m/s}$, $x = 0.02 \text{ m}$, $c_{As} = 1.0$, $c_{A\infty} = 0$ として, 速度および濃度境界層方程式を解き, 平板上の速度分布・水蒸気の濃度分布を描け。 $c_{As} = 1.0 \text{ mol/m}^3$ は 21°C の飽和水蒸気圧に相当する。空気のシュミット数 $Sc = 0.51$, 他の物性値は図 3.7 中を示す。

(解)図 3.7 は「微分方程式解法シート」である。セル B5, C5, D5 に速度境界層方程式(式(3.26)~(3.28)), E5, F5 に濃度境界層方程式(3.29), (3.30)を記述し, 積分を実行する。無次元速度 f' および温度 θ が積分の上限 $\eta = 8$ で 1 となるよう, f'' , θ' の初期値を試行する。その結果, 解が $f''(0) = 0.33206$, $\theta'(0) = 0.2613((0.511)^{1/3} = 0.265)$ と得られた。流れ関数 f , 速度分布 f' , および f'' の分布を図 3.8 に, 濃度分布と速度分布の比較を図 3.9 に示す。速度分布と濃度分布は相似であるが, Sc 数の効果で濃度境界層の方が厚くなっている。図 3.9 右は実距離で示したもので, 両境界層の厚さは $4 \sim 6 \text{ mm}$ である。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	微分方程式数	5						定数		
2	$\eta =$	$f =$	$f' =$	$f'' =$	$\theta' =$	$\theta'' =$		$Sc = \mu / \rho D$	0.511	
3	10	8.279262	1	8.342E-09	0.99992	3E-05		$x =$	0.02 m	
4		$f' =$	$f'' =$	$f''' =$	$\theta' =$	$\theta'' =$		$U_\infty =$	0.3 m/s	
5	微分方程式	1.000005	8E-09	-3.45E-08	3.4E-05	5.7E-05		$\rho =$	1.3 kg/m ³	
6								$\mu =$	1.70E-05 Pa-s	
7	積分区間 $\eta = [a,$	0	$=C3$	$=D3$	$=(1/2)*B3*D3$	$=F3$		$\nu =$	1.31E-05 m ² /s	
8	b]	10	Runge-Kutta-					$(U_\infty/(\nu x))^{0.5}$	1071.008	
9	区間分割数	50	Fehlberg					$DAB =$	2.56E-05 m ² /s	
10	計算結果							$c_{As} =$	1 mol/m ³	
11	η	f	f'	f''	θ	θ'		$= (0.4/17/13)^{0.5}$		
12	0.0	0	0		0.000					
13	0.2	0.0066	0.0664	0.331986	0.052	0.261				
14	0.4	0.0266	0.1328	0.331472	0.104	0.261				
15	0.6	0.0597	0.1989	0.330082	0.157	0.261				
16	0.8	0.1061	0.2647	0.327392	0.209	0.259				
17	1.0	0.1676	0.33206	0.323318	0.265	0.253				

図 3.7 境界層方程式の数値解法

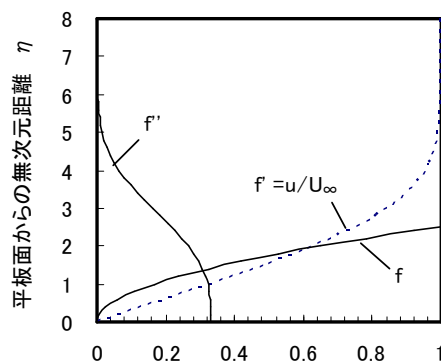


図 3.8 速度境界層方程式の解(流れ関数)

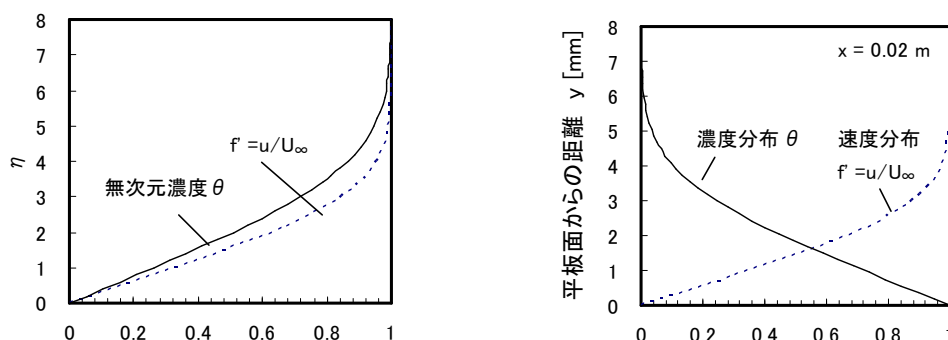


図 3.9 速度境界層方程式の解(速度分布, 温度分布)

計算結果をもとに濃度境界層の流れ方向の発達について考える。図 3.10 に平板上の速度, 濃度境界層の発達の様子をコンター図で示す。濃度境界層の厚さは $x^{1/2}$ に比例する。図 3.11 は平板面上の拡散流束(式(3.36))の分布であり, これは $x^{-1/2}$ に比例している。(なお, 2章の例題 2.23 で水の蒸発速度についてポアズイユ流れと本結果(境界層流れ)を比較しているので参照されたい。)図 3.12(a)は位置 x による濃度境界層の発達の様子である。濃度境界層の濃度分布は拡散セル中の一方拡散(例題 2.16)とは異なり, 連続して主流濃度に近づく。これが2次元の対流物質移動の特徴で, 実際の現象を表している。濃度境界層の発達(厚さの増加)ということは流れ方向の対流物質移動量の増加分 $u(\partial c_A / \partial x)$ である。(図 3.12(b))すなわち界面で y 方向に濃度拡散した物質移動流束 N_A (=拡散流束 J_A) が, 濃度境界層内で流れ方向(x 方向)に向きを変えて対流流束に移行しており, これが濃度境界層の発達を意味している。

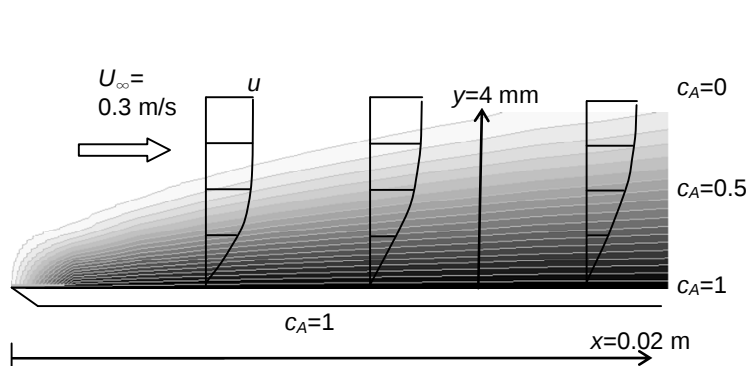


図 3.10 速度境界層方程式の解(速度分布と濃度分布のコンター図)

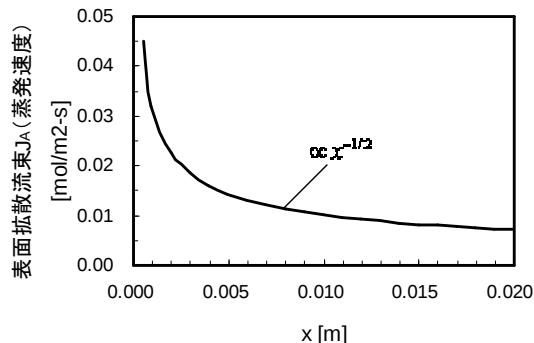
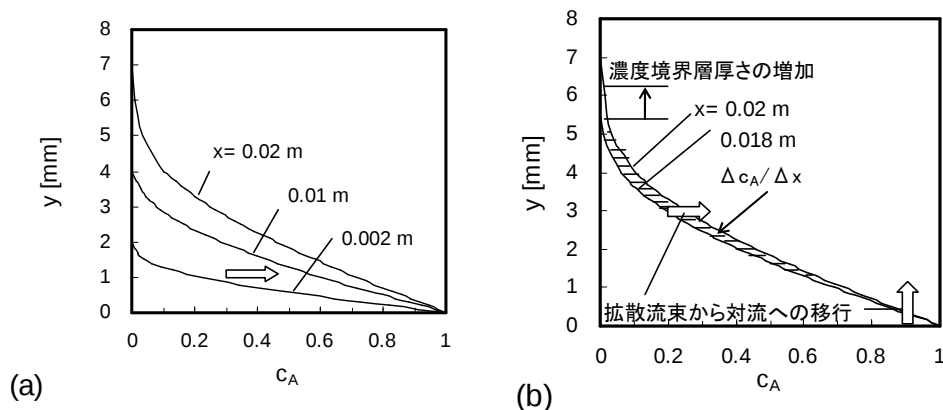
図 3.11 平板表面の拡散流束 J_A の分布

図 3.12 濃度境界層の発達

【例題 3.3】水中の濃度境界層 <diff39.xls>

水の流れ中に壁面からタンパク質が拡散する場合を考える。水中の溶質の拡散は遅く, Sc 数は

$Sc=10930$ という大きな値となる。 $U_\infty=1\text{ m/s}$, $x=0.1\text{ m}$, $c_{As}=100$, $c_{A\infty}=0$ として速度・濃度境界層方程式を解き、濃度分布を求めよ。

(解) 例題 3.2 と同様に式(3.26)-(3.30)を解く。解は $\theta'(0) = 7.52((10930)^{1/3} = 7.37)$ であった。結果を無次元分布と実際の速度分布、濃度分布で図 3.13 に示す。例題 3.2 の空気中では速度境界層と濃度境界層の厚さが数 mm の同程度であったが、水中では速度境界層に比較して濃度境界層の厚さが非常に薄く、数十 μm 程度であることがわかる。

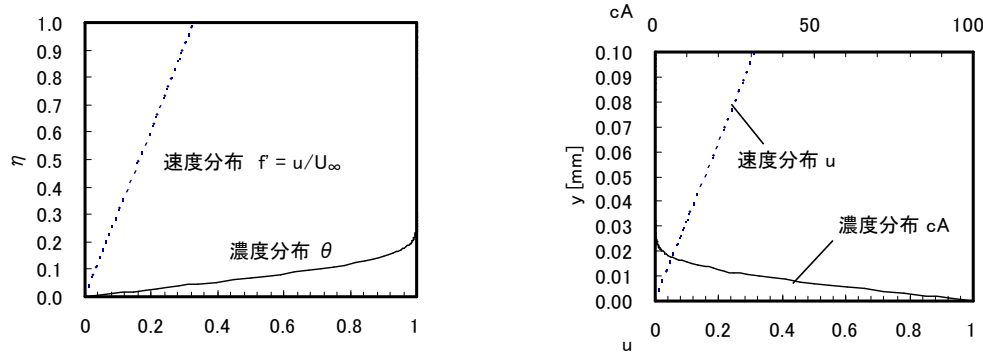


図 3.13 水中の速度と濃度境界層

計算結果にもあるように速度境界層では $f''(0) = 0.332$ なので、壁面のせん断応力 τ_w が、

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(0) = \sqrt{\frac{U_\infty \rho \mu}{x}} 0.332 U_\infty \quad (3.31)$$

となる。よって無次元のまさはつ係数が $c_{f,x} = \frac{\tau_w}{(\rho U_\infty^2 / 2)} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$ (3.32)

となる。これは長さ L の平板平均値では $c_f = 1.328 \text{Re}_L^{-1/2}$ (3.33)

である。

また、濃度境界層の壁面での勾配は Sc 数に依存するが、Pohlhausen はこの関係が

$$\theta'(0) \equiv \frac{d\theta}{d\eta} \bigg|_{\eta=0} = 0.332 Sc^{1/3} \quad (3.34)$$

のように近似できることを示した。図 3.14 にこの関係と例題 3.2, 3.3 の結果、および Sc 数を変えて追加計算した結果を比較したものである。上式の関係が Sc の広い範囲で成立している。

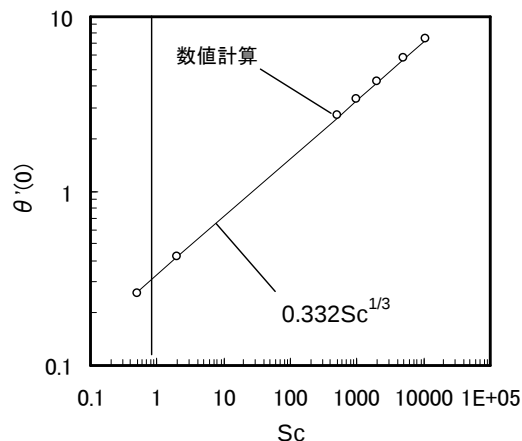


図 3.14 濃度境界層の界面濃度勾配 $\theta'(0)$ と Sc 数の関係
すると無次元濃度勾配は、

$$\theta'(\eta) = \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{-(1/(c_{As} - c_{A\infty}))}{\sqrt{U_\infty/\nu x}} \frac{\partial c_A}{\partial y} = -\frac{x}{(c_{As} - c_{A\infty}) \text{Re}_x^{1/2}} \frac{\partial c_A}{\partial y} \quad (3.35)$$

なので、これより平板面上の物質移動流束 N_A (=拡散流束 J_A) は次式となる。

$$N_A = J_A = -D_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial y} \right|_{y=0} = D_{AB} (c_{As} - c_{A\infty}) \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.332 \left(\frac{D_{AB}}{x} \right) (c_{As} - c_{A\infty}) \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad (3.36)$$

さらに、平板の全長 L についての平均値は次式である。

$$\bar{N}_A = \frac{1}{L} \int_0^L N_A dx = 0.664 \left(\frac{D_{AB}}{L} \right) (c_{As} - c_{A\infty}) \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_L^{1/2} \quad (\text{Re}_L \equiv U_\infty \rho L / \mu) \quad (3.37)$$

これらをシャーウッド数 Sh で書くと最終的に平板上の物質移動は次式で表せる。

$$\text{局所: } Sh_x \equiv \frac{N_A}{D_{AB} (c_{As} - c_{A\infty}) / x} = 0.332 \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad (3.38)$$

$$\text{平板平均: } Sh \equiv \frac{\bar{N}_A}{D_{AB} (c_{As} - c_{A\infty}) / L} = 0.664 \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_L^{1/2} \quad (3.39)$$

以上の層流境界層理論による物質移動解析は、 $Sh \rightarrow Nu$, $Sc \rightarrow Pr$ の対応を用いれば伝熱の解析においても同一である。しかし気液界面を通しての物質移動に特有の現象は、界面に垂直な速度(界面速度) $v(0)=v_s$ が存在する場合があることである。例えば混合蒸気の凝縮現象では $v_s < 0$ (液相側向き)であり、加熱下での2成分系蒸留では $v_s > 0$ (蒸気相側向き)の界面速度が生じている。(2.4.1節, 図 2.52 参照。)このような条件では各成分の流束を、 $v_s = 0$ とした等モル相互拡散ではなく、物質移動流束 N_A を拡散流束 J_A と対流項 $c_A v_s$ の和として取り扱う必要がある。さらに、この拡散流束 J_A 自身が v_s により影響を受けることが層流境界層理論から予測される。これが境界層の高物質流束効果(high mass flux effect)である。

流れ関数の定義より界面速度 v_s がある場合の界面 ($\eta = 0$) での無次元流れ関数 $f(0)$ は、

$$f(0) = -2 \left(\frac{v_s}{U_\infty} \right) \text{Re}_x^{1/2} \quad (3.40)$$

である。図 3.15(a)は $f(0)$ に 0 以外の値を設定して、境界層方程式を解いた結果を示したものである。界面速度 v_s の効果により速度境界層が圧縮されたり、厚みを増す現象が現れる。図 3.15(b)はこの速度分布から $Sc=0.51$ として濃度境界層方程式を計算して、濃度境界層の濃度分布を示したものである。濃度境界層も速度境界層の増減に従って厚さが変化する。これにしたがって界面濃度勾配が変化して、界面の拡散流束 J_A も影響を受ける。この条件では $f(0)=-1$, $v_s=0.007$ m/s (吹き出し)で J_A は $v_s=0$ の場合の 0.26 倍に減少し、 $f(0)=1$, $v_s=-0.007$ (吸い込み)では J_A は 1.8 倍に増加する効果が生じるものと計算された。この界面速度勾配、濃度勾配におよぼす高物質流束効果を図 3.15(c)に示す。

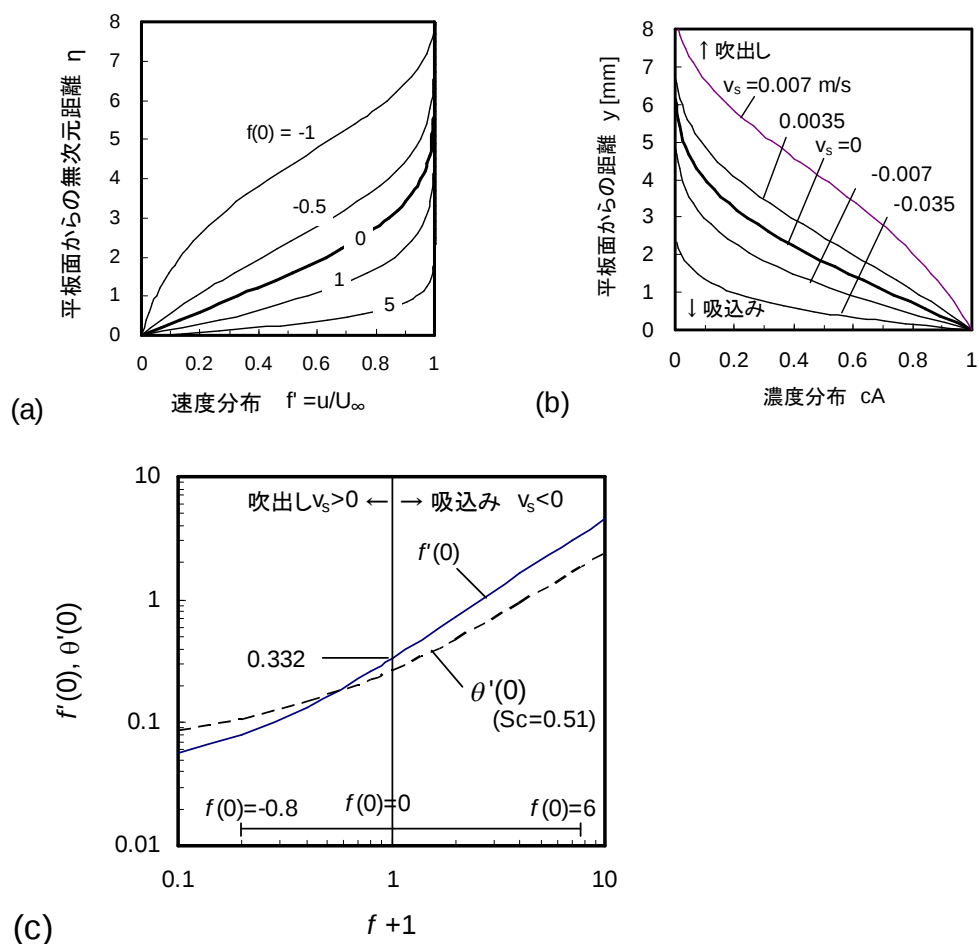


図 3.15 境界層の高物質流束効果, (a) 速度分布, (b) 濃度分布, (c) 界面速度, 濃度勾配<diff42.xls>

【Excel 演習レポート 6】例題 1<diff110_temp.xls>を完成して, 1 ページ目のみプリントして提出。

【筆記演習レポート 6】

3.1.2 節の物質移動問題について次元解析をおこない,

$$Sh = kPe^e Sc^e \quad \text{を示せ。}$$