

移動論第三 2012 伊東

10/4 第 1 回 拡散方程式 定常拡散

10/11 第 2 回 静止媒体中の非定常拡散

10/18 第 3 回 対流物質移動 1次元

■10/25 第 4 回 対流物質移動 2次元

11/1 第 5 回 反応を伴う拡散

11/8 第 6 回 物質移動係数と境界層理論

11/15 第 7 回 アナロジーと各種形状物質移動

11/22 第 8 回 分離プロセスの基礎 乾燥と湿球温度

11/29 第 9 回 吸着・クロマト

12/6 第 10 回 微分接触プロセス

(下山担当分)

12/13 第 11 回 蒸気圧

12/20 第 12 回 相平衡と溶解度(1)

1/10 第 13 回 相平衡と溶解度(2)

1/24 第 14 回 輸送物性(1)

1/31 第 15 回 輸送物性(2)

2/7 期末試験(S421 講義室)

担当教官:(前半)伊東 章 S1 421
(後半)下山裕介 S1 411

木曜 3,4 限(10:45-12:15) S421 講義室
実習は情報ネットワーク演習室第 1(D)(S4 3F)

伊東回は毎回演習レポート(手書きおよびプリントアウト)を課します。講義時間内に提出のこと。
(講義時間内に提出できなかった場合のメ切は当日 17:00, 提出は南 1 421 伊東居室前の Box へ。)

演習・実習用の Excel シートテンプレートファイルは以下にあります。当日のフォルダ“tp3_”をデスクトップにコピーして使ってください。

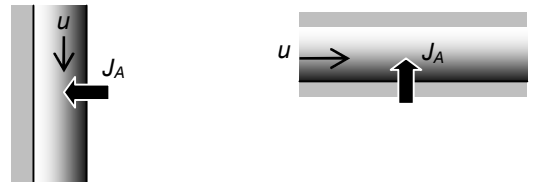
1. [エクスプローラ]
2. “¥¥nest2.g.gsic.titech.ac.jp¥home0”を入力
3. “usr2/ito-a-ac/”に入る

2.4.4 2次元対流物質移動(直流れへの拡散)－直角座標－

対流物質移動において流れの方向 x と拡散の方向 y が直交する条件が基礎的モデルである。このとき拡散の基礎式は x, y に関する次式の偏微分方程式となる。ここで速度 u は既知で x 方向に変化しないとする。

直流れへの拡散－直角座標－

$$u \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (2.73)$$



このモデルの典型的適用として、壁を垂直に流下する液膜流れへの物質拡散の問題がある。この解析は吸収操作の基本モデルとして重要である。(図 2.75)(4 章でも述べる。)座標は液膜流下方向を x 座標, 液膜の表面を $y=0$ として, 液膜表面から壁方向を y 座標とする。液膜の流下速度

$$u \text{ は } y \text{ 方向の関数で, 液膜厚さ } \delta, \text{ 表面速度 } u_{\max} \text{ とすると, } u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (2.74)$$

である。すると基礎式は次式である。

$$u_{\max} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (2.75)$$

この偏微分方程式を y 方向を $(n\Delta y)$, x 方向(流下距離)を $(p\Delta x)$ で差分化し, 濃度の節点値を $c_A = c_n^p$ とする。節点位置は図 2.75 に示す。各項の差分式は,

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = \frac{c_{n+1}^p + c_{n-1}^p - 2c_n^p}{(\Delta y)^2}, \quad \frac{\partial c_A}{\partial x} = \frac{c_n^{p+1} - c_n^p}{\Delta x} \text{ なので, 差分化された基礎式は次式となる。}$$

$$c_n^{p+1} = \Theta_n (c_{n+1}^p + c_{n-1}^p) + (1 - 2\Theta_n) c_n^p, \quad \Theta_n = \frac{D_{AB} (\Delta x)}{u_n (\Delta y)^2}, \quad u_n = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{y_n}{\delta} \right)^2 \right] \quad (2.76)$$

また、壁面での節点 ($n=0, u_0=0$) では次式である。

$$c_0^{p+1} = \frac{(u_1(\Delta y)/8)c_0^p + ((\Delta x)D_{AB}/(\Delta y))(c_1^p - c_0^p)}{(u_1(\Delta y)/8)} \quad (2.77)$$

これは壁の節点 c_0^{p+1} 回りの領域での物質収支 (図 2.76) :

$$(u_1/4)(\Delta y/2)c_0^p + (\Delta x)D_{AB}(c_1^p - c_0^p)/(\Delta y) - (u_1/4)(\Delta y/2)c_0^{p+1} = 0$$

から得られる。(ただし、前進差分計算の都合上 $(c_1^{p+1} - c_0^{p+1})$ を $(c_1^p - c_0^p)$ で近似した。)

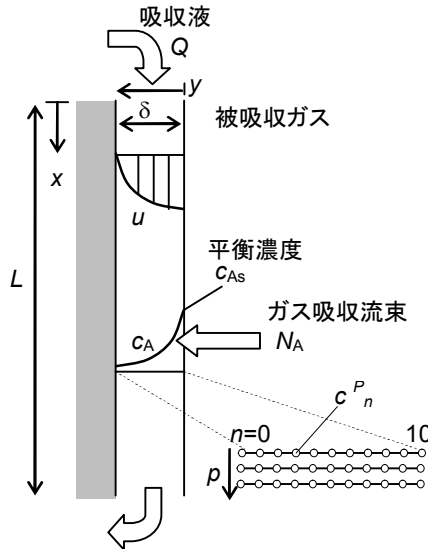


図 2.75 流下液膜へのガス吸収

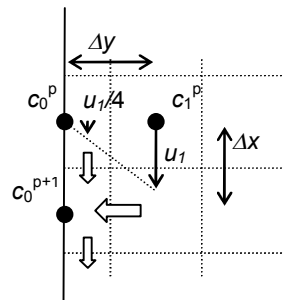


図 2.76 壁面節点の物質収支

【例題 2.24】流下液膜へのガス吸収 <diff14.xls>

水の単位幅あたり流量 $Q = 0.3 \text{ L/s-m}$ の垂直流下液膜の液膜厚さは $\delta = 0.00045 \text{ m}$ 、表面速度 $u_{\max} = 1.0 \text{ m/s}$ である。表面濃度 $c_{As} = 3 \text{ mol/m}^3$ (大気圧空气中に約 10%) により CO_2 が吸収されるとして、液膜内濃度分布とガス吸収速度を求めよ。 CO_2 -水系拡散係数 $D_{AB} = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ である。

(解) $\Delta x = 0.02 \text{ m}$, $\Delta y = 0.000045 \text{ m}$ とする。図 2.77 のシートで列方向が y 、行方向が x 座標である。6 行に $x=0$ の条件 (表面で $c_{A0} = 3$ 、内部は $c_A = 0$) を入れ、7 行目に式 (2.77), (2.76) を記述する。この行を下方向にコピーすることで流下位置 x における濃度分布が得られる。(図 2.78, 2.79)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n=	0	1	2	3	4	5	
2	y=	0.000450	0.000405	0.000360	0.000315	0.000270	0.000225	0.000180
3	u[m/s]=	0	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75	0
4	Θ_n =		0.10	0.05	0.04	0.03	0.03	0.1
5	L[m]	cA[mol/m3]			=B5*(1-(B2/B5)^2)			
6	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	=B6*(B2/B6)/B3		0.0000	0.0000
7	0.02	0.0000	0.0000	0.0000	=C4*(D6+B6)+(1-2*C4)*C6		0.0000	0.0000
8	0.04	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000	0.0000
9	0.06	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000	0.0000
10	0.08	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000	0.0000
11	0.10	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000	0.0000
12	=A6+B5		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

図 2.77 流下液膜への拡散計算シート

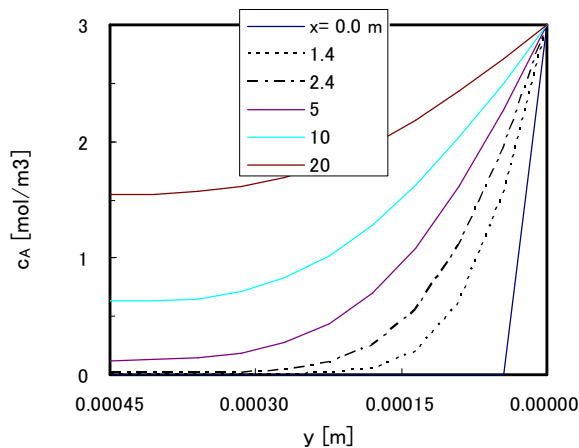


図 2.78 液膜内の濃度分布変化

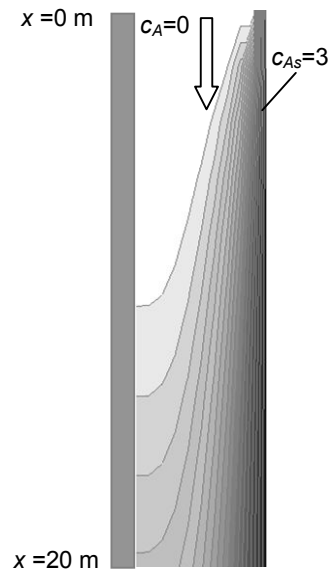


図 2.79 流下液膜内の濃度分布(コンター図)

この計算結果より距離 $x=L[m]$ 流下後の吸収ガス量はその位置(出口)での濃度分布を積分して得られる。(計算シートの Q 列)

$$(\text{吸収速度})[\text{mol/s}] = \int_0^{\delta} u c_A \times (1\text{m}) dy \quad (2.78)$$

なお、液膜の流下速度分布を $u_{\max}$ で一定として解析解が得られる。これが「浸透説」であり、局所 x での吸収速度が次式となる^{3, p. 487}。

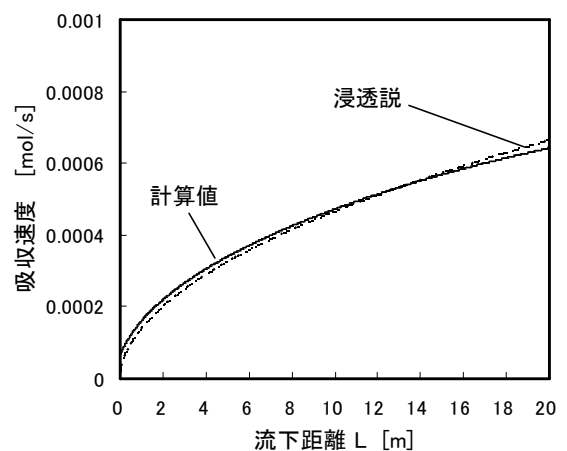
$$N_A \left[\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right] = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi(x/u_{\max})}} (c_{As} - 0) \quad (2.79)$$

液面全体での吸収速度は次式で得られる。(S 列)

$$(\text{吸収速度})[\text{mol/s}] = \int_0^L N_A \times (1\text{m}) dx \quad (2.80)$$

浸透説と数値解を図 2.80 で比較した。

図 2.80 ガス吸収速度—浸透説との比較—<diff14.xls>

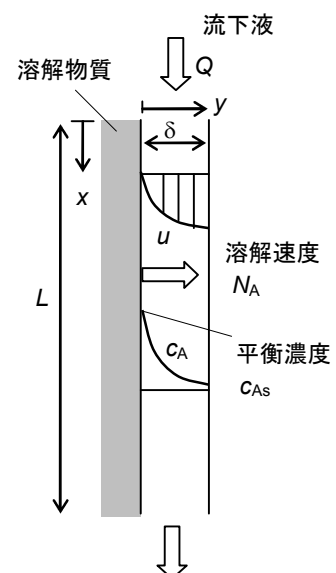


【例題 2.25】流下液膜への壁面からの溶解
<diff45.xls>

同じく流下液膜における物質移動の問題であるが、壁面から液膜内への物質移動の問題を考える。(図 2.81) 液膜厚さ、速度分布は前例題を同じとして、壁面が安息香酸であるとき、液膜(水)への溶解を考えて、壁面の溶質濃度 $c_{As} = 27.8 \text{ mol/m}^3$ 、水—安息香酸系拡散係数 $D_{AB} = 9.18 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ として、濃度分布と溶解速度を求めよ。

図 2.81 流下液膜への壁面からの物質移動(溶解)

(解) y 座標を壁面から液表面方向にとり、濃度境界条件を壁面に設定する(図 2.81) 他は基礎式など前例題と同じである。図 82 に計算シートを示す。液膜表面(L 列)の条件は $(dc_A/dy) = 0$ であ



り、差分式は左に片寄った公式より $c_{10} = (1/3)(4c_9 - c_8)$

とした。図 2.83 および図 2.84(コンター図)に各流下長さでの液膜内濃度分布を示す。図 2.85 は流下位置 L までの溶解量[mol/s]である。

	A	B	C	D	E	K	L	M	N	O	P
1	n=	0	1	2	3	9	10		$D_{AB}=$	$9.18E-10$	m^2/s
2	y=	0.000000	0.000045	0.000090	0.000135	0.000405	0.000450		$\Delta x=$	0.02	m
3	u[m/s]=	0	0.01	0.04	0.09	0.81	1		$\Delta y=$	0.000045	m
4	$\Theta n=$		0.91	0.23	0.10	0.01			$\delta=$	0.00045	m
5	L[m]	$c_A[mol/m^3]$							u _{max} =	1.0	m/s
6	0.00	27.80	10.88	8.88	8.88	0.00	0.00				
7	0.02	27.80	17.07	2.27	0.00	0.00	0.00				
8	0.04	27.80	13.38	5.11	0.00	0.00	0.00				
9	=A6+\$O\$2	27.80	=C\$4*(D6+B6)+(1-2*C\$4)*C6			0.00	0.00				
10	0.08	27.80	15.11	7.67	1.15						
11	0.10	27.80	19.87	7.88	1.70	0.00	0.00				

図 2.82 壁面から流下液膜への拡散計算シート

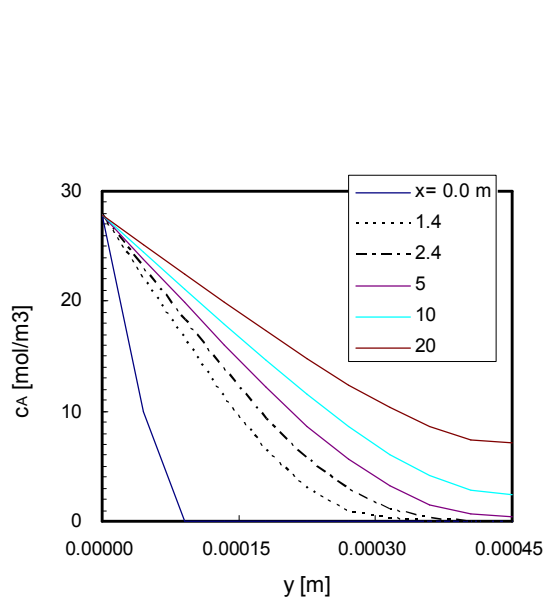


図 2.83 液膜内濃度分布

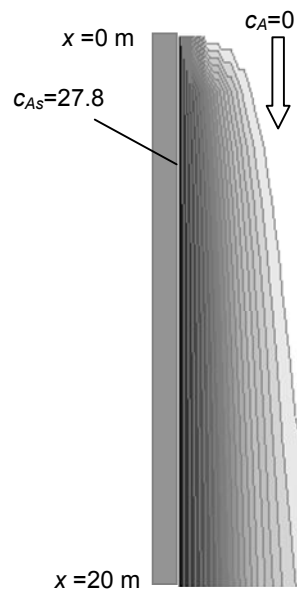


図 2.84 液膜内濃度分布(コンター図)

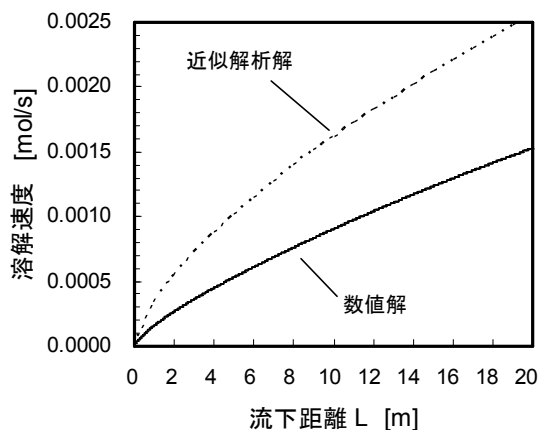


図 2.85 溶解速度

この問題には近似解析解がある^{12, p. 562)}。液膜の放物線速度分布を直線分布に近似 ($u = (\rho g \delta / \mu)y = ay$) して、式(2.75)の代わりに

$$ay \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (2.81)$$

を $y=\infty; c_A=0$ の境界条件で解いたものである。解は幅 W 、長さ L の液膜への溶解速度

$$W_A[\text{mol/s}] \text{として } W_A = \frac{2D_{AB}c_{As}WL}{1.191} \left(\frac{a}{9D_{AB}L} \right)^{1/3} \quad (82)$$

である。図 2.85 に近似解析解として数値解と比較した。近似解は仮定が多いので、この場合は数値解の方がより正確な物質移動速度を示していると思われる。

【例題 2.26】2次元ポアズイユ流れへの拡散<diff28.xls>

流路高さ $h=0.002$ m の平行平板間を平均流速 $\bar{u}=0.2$ m/s で乾燥空気が流れている。速度分布は既に発達しており、放物線速度分布(2次元ポアズイユ流れ)：

$$u = \frac{3}{2}\bar{u}\left(1 - \frac{(y-h/2)^2}{(h/2)^2}\right) \quad (2.83)$$

とする。壁の片面($y=0.002$ m)の水蒸気濃度が $c_A=1.0$ mol/m³ である場合に、流路内の濃度分布と蒸発速度を求めよ。拡散係数 $D_{AB}=0.25 \times 10^{-4}$ m²/s である。

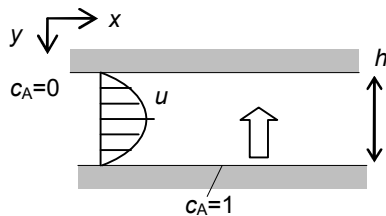


図 2.86 ポアズイユ流れ中への拡散

(解) 計算シートは例題 2.24 と基本的に同じである。(図 2.87)3 行に速度分布(式(2.83))を設定する。下流方向への濃度変化の計算結果を図 2.88 に、コンター図として図 2.89 に示す。

この計算結果より水の蒸発速度は壁面の濃度勾配と拡散係数から求められる。これを図 2.90 に示す。この図では後述の濃度境界層(3.2 節)としての計算と比較した。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	0	1	2	3	4	5	6	7
2	y=	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
3	u[m/s]=	0.000	0.057	0.108	0.153	0.192	0.225	0.252	0.273
4	Θn=		0.088	0.046	0.033	0.026	0.022	0.020	0.018
5	x[m]	cA[mol/m3]							
6	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	= (3/2)*\$Y\$2*(1-(B2-			0.00
7	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	=\$Y\$1/2)^2/(\$Y\$1/2)^2)			0.00
8	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00				0.00
9	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	= \$Y\$3*\$Y\$5/C3/\$Y\$4^2			0.00
10	=A6+\$O\$2	0.00	0.00	0.00	0.00				0.00
11	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	=C\$4*(D6+B6)+(1-2*C\$4)*C6			0.00
12	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	=(\$C\$3*\$O\$3/8)*C6+(\$O\$2*\$O\$1/\$O\$3)*(C6-B6)/(\$C\$3*\$O\$3/8)								0.00
15	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17	0.0000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

図 2.87 ポアズイユ流れ中への拡散計算シート

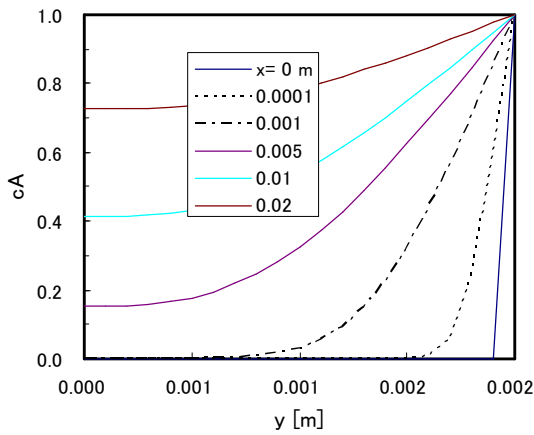


図 2.88 ポアズイユ流れ中の濃度変化

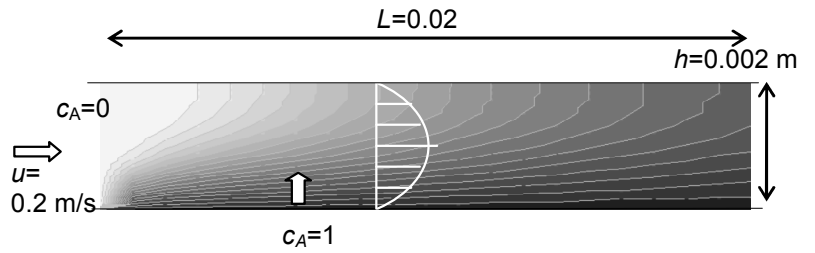


図 2.89 ポアズイユ流れ中への拡散(コンター図)

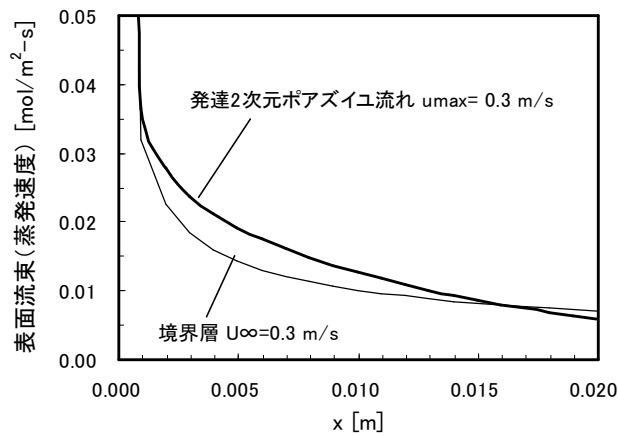


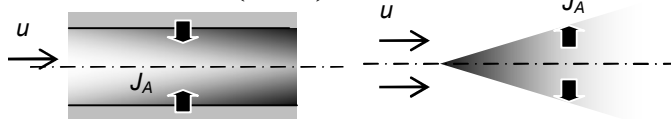
図 2.90 蒸発速度(境界層理論との比較)

2.4.5 2次元対流物質移動(直流れへの拡散)－円筒座標－

流れに直交する拡散のモデルを円筒座標で考える。軸の z 方向流れ u に直交して、半径 r 方向に拡散が生じる場合である。基礎式は次式である。ここで速度 u は既知とする。

直流れへの拡散－円筒座標－

$$u \frac{\partial c_A}{\partial z} = \frac{D_{AB}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \quad (2.84)$$



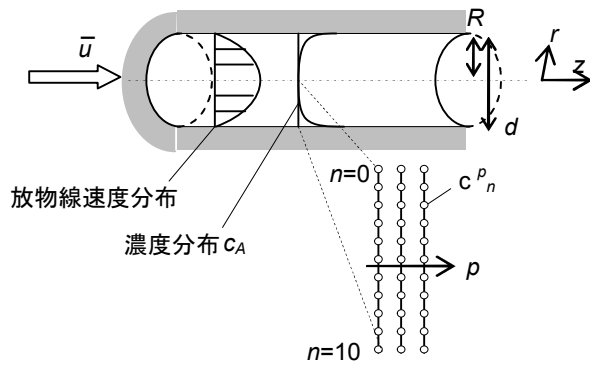


図 2.91 円管内流れへの管壁面からの物質移動

発達した円管内流れ(放物線速度分布)と管壁面間の物質移動を考える。(図 2.91) 円管の半径を R , 管内流れの平均速度を $\bar{u}$ として, 半径方向速度分布が次式である。

$$u = 2\bar{u} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.85)$$

この基礎式を整数 p, n により軸方向距離を $z = p\Delta z$, 半径方向位置を $r = n\Delta r$ で区切り, c_n^p を数値解における濃度(節点値)とする。これより式(2.84)を差分化した式が次式となる。

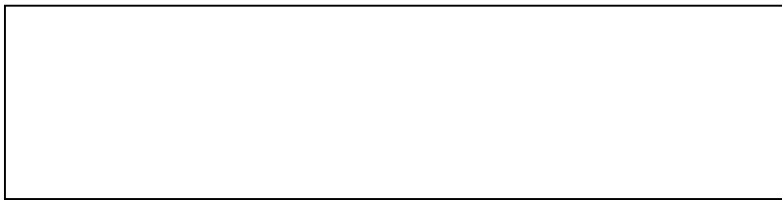
$$c_n^{p+1} = \frac{\Theta_r}{u_n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right) c_{n+1}^p + \left(1 - \frac{1}{2n} \right) c_{n-1}^p - 2c_n^p \right\} + c_n^p, \quad (2.86)$$

$$\left(\Theta_r = \frac{D_{AB}(\Delta z)}{(\Delta r)^2} \right), (u_n = 2\bar{u} \left[1 - \left(\frac{n\Delta r}{R} \right)^2 \right])$$

なお軸上節点 ($n=0$) では差分式が次式である。

$$c_0^{p+1} = \frac{4\Theta_r}{u_0} (c_1^p - c_0^p) + c_0^p \quad (2.87)$$

これは中心節点 c_0^{p+1} まわりの単位円柱についての物質収支(図 2.92) :



より得られる。ただし $(c_1^{p+1} - c_0^{p+1})$ を $(c_1^p - c_0^p)$ で近似した。ここで基礎式同様 z 方向の拡散は無視した。

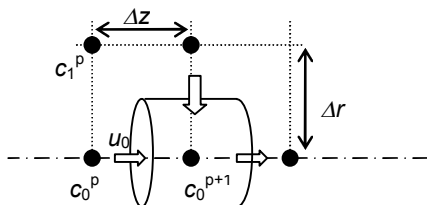


図 2.92 中心軸上節点の物質収支

【例題 2.27】発達円管内流れへの拡散(壁面濃度一定)<diff27.xls>

内径 $D = 2R = 0.002 \text{ m}$ の疎水性多孔質中空糸膜内に乾燥空気を $\bar{u} = 0.1 \text{ m/s}$ で流し, 外側を水に漬けて空気を加湿する装置を考える。管内壁面の水蒸気濃度は飽和水蒸気分圧にあり, $c_{As} = 1.0 \text{ mol/m}^3$ である。水蒸気-空気拡散係数 $D_{AB} = 0.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ として管内流れの濃度分

布および蒸発速度を求めよ。

(解) $\Delta r = 0.0001 \text{ m}$, $\Delta z = 0.00001 \text{ m}$ として, 図 2.93 のシートで 1, 2 行が n と節点座標, セル O1:O5 が式(2.86)中の定数である。A 列が入口からの距離 z である。3 行に放物線速度分布 $u(r)$ を書く。5 行が初期値で, $n=10$ (壁面) (L5) が $c=1.0$, 内部は $c=0$ である。B6 に式(2.87)を, C6:K6 の各セルに式(2.86)を記述し, L6 は $=L5$ としてこの行を下にコピーする。これで入口からの濃度分布変化が求められる。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		DAB=	2.50E-05	m ² /s
2	$r[\text{m}] =$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010		$u^* =$	0.1	m/s
3	$u[\text{m/s}] =$	0.200	0.198	0.192	0.183	0.168	0.150	0.128	0.102	0.072	0.038	0.000		R=	0.001	m
4	$z[\text{m}]$	c [mol/m ³]	$=2*\$O\$2*(1-(B2/\$O\$3)^2)$											$\Delta r =$	0.0001	m
5	0.00000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00		$\Delta z =$	0.00001	m
6	0.00001	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.69	1.00		$\Theta r =$	0.025	$\Theta = (\Delta z$
7	0.00002	0.00	$=(\$O\$6/C\$3)*((1+(1/(2*C\$1)))*D5+(1-(1/(2*C\$1)))*B5-2*C5)+C5$										0.48	1.00		
8	0.00003	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.25	0.70	1.00				
9	$=A5+\$O\5	$=B5+(4*\$O\$6/\$B\$3)*(C5-B5)$							0.01	0.10	0.36	0.63	1.00		$=O5*O1/O4/O4$	
10	0.00004	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.15	0.37	0.72	1.00				
11	0.00005	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.18	0.43	0.70	1.00				
12	0.00006	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.07	0.22	0.45	0.74	1.00				

図 2.93 円管内流れへの拡散計算シート

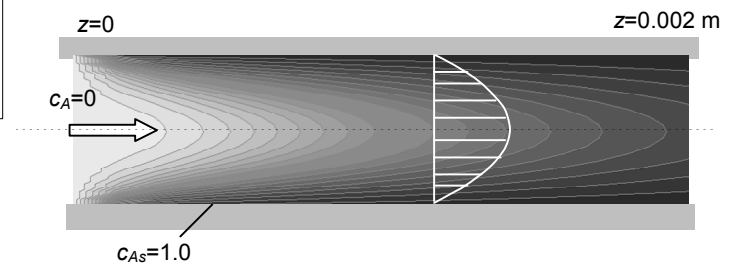
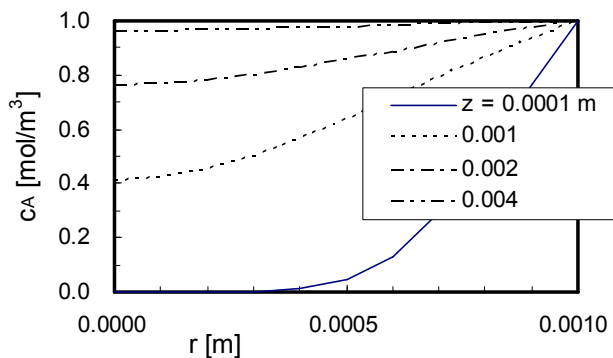


図 2.94 下流方向への濃度変化 図 2.95 円管内流れへの拡散(コンター図)

計算結果を図 2.94 に軸方向の円管内濃度分布変化, 図 2.95 に円管内濃度分布のコンター図で示す。

この問題の解析的取り扱いを 3.3 節で述べる。

次に拡散方向が逆に中心から外側として, 一様流れ中での点源からの拡散問題を考える。基礎式, 差分式は前例題と同じである。

【例題 2. 28】点源からの拡散<diff29.xls>

$u = 0.1 \text{ m/s}$ の一様空気流れ中に点源から水蒸気が拡散する状態を解析せよ。

(解) 例題 2. 27 と同じシートで $\Delta r = 0.005 \text{ m}$, $\Delta z = 0.005 \text{ m}$ として, 一様速度分布を与え, $n=0$, $z=0$ のセルのみ濃度 $c_A = 20 \text{ mol/m}^3$ とした。(図 2.96)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		DAB=	2.50E-05	m ² /s
2	$r[\text{m}] =$	0.0000	0.0050	0.0100	0.0150	0.0200	0.0250	0.0300	0.0350	0.0400	0.0450	0.0500		$u^* =$	0.1	m/s
3	$u[\text{m/s}] =$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100		R=	0.05	m
4	$z[\text{m}]$	c [mol/m ³]												$\Delta r =$	0.005	m
5	0.00	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		$\Delta z =$	0.005	m
6	0.01	16.00	9.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		$\Theta =$	5.00E-03	$\Theta = (\Delta$
7	0.01	12.90	0.85	$=(\$O\$6/C\$3)*((1+(1/(2*C\$1)))*D5+(1-(1/(2*C\$1)))*B5-2*C5)+C5$												
8	0.02	10.49	1.09	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		$=L5$		$=O5*O1/O4/O4$
9	$=A5+\$O\5	$=B5+(4*\$O\$6/\$B\$3)*(C5-B5)$														
10	0.03	7.14	1.34	0.12	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				
11	0.03	5.98	1.40	0.16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				
12	0.04	5.06	1.42	0.20	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00				

図 96 点源からの拡散(円筒座標)計算シート

計算結果を半径方向濃度分布変化で図 2.97 に、コンター図で図 2.98 に示す。濃度の広がり
は正規分布関数形である。

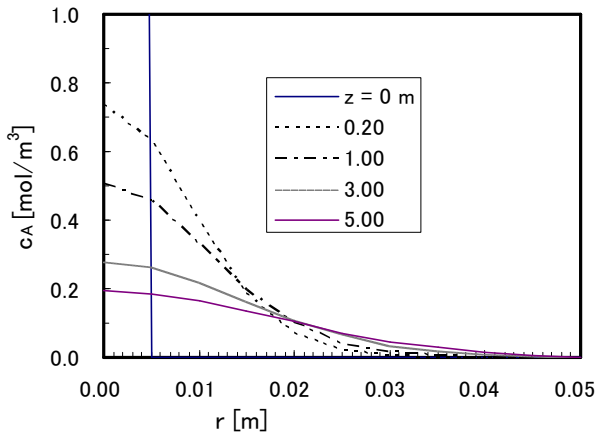


図 2.97 点源からの拡散 (拡散成分の広がり)

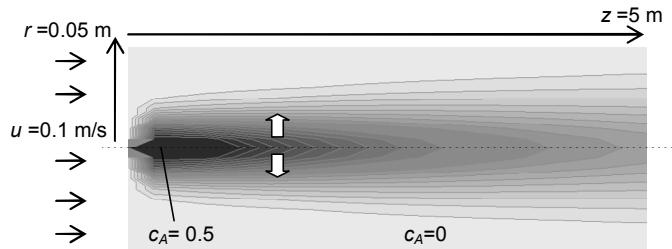


図 2.98 点源からの拡散 (コンター図)

2.4.6 円管内流れの混合拡散係数-Taylor 分散 -

前節(2.4.3)で 1 次元移流拡散 (混合拡散モデル)を述べ、そのインパルス応答の解 (式(2.66))
を示した。この解析を (r, z) 2次元の円管内放物線速度分布流れに拡張したのが Taylor の解析
である。このモデルを Taylor 分散とよぶ。理論的な解析は濃度 $c_A(t, r, z)$ に関する非定常2次元
円筒座標拡散方程式(2.2)をインパルス入力条件で解く^{12, p. 643)}ことであり、詳細は参考資料<sup>5, p.
105)</sup>を参照されたい。ここでは定性的なモデルの考え方と結果のみを述べる。

内径 d_t (半径 R)の円管内を、平均速度 $\bar{u}$ の放物線速度分布で流体が流れている。(図 2.99) t
 $=0$ において幅 w のトレーサーを矩形入力したとする。トレーサーは放物線速度分布に乗ることと、
濃度勾配による分子拡散の2つの要因で流れ方向に広がる。ここでは位置 z における断面平均濃
度:

$$\bar{c}_A(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R c_A r dr \quad (2.88)$$

により軸方向のトレーサーの広がりを見る。

流速が遅い極限 ($\bar{u} \rightarrow 0$)を考えると、トレーサーパルスは幅 w を広げながら全体に濃度が低
下する。この場合の濃度分散は、

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \left\{ \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right\} \quad (2.89)$$

に従い、濃度分布の広がり分子拡散係数 D_{AB} に支配される。(ただし実際にはこれによる濃度
分散の速度は非常に遅い。)

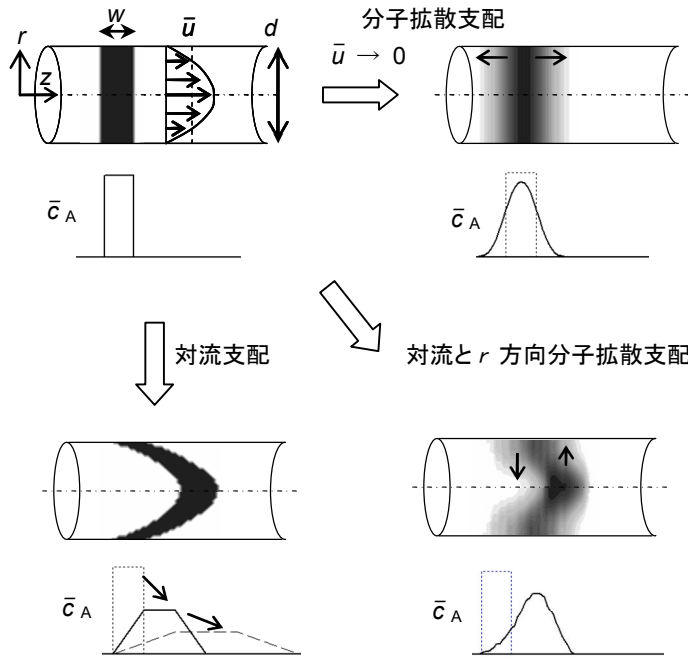


図 2.99 円管内流れ中の拡散に関する Taylor 分散のモデル

逆に対流が支配する場合は、トレーサーのバンドは幅 w を保ったまま、流れに従って半径方向に放物線状に広がる。この場合には平均濃度 $\bar{c}_A$ の分布は台形状を示す。(図 2.99) 現象を支配する式は

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + u(r) \frac{\partial c_A}{\partial z} = 0 \quad (2.90)$$

である。この台形状分布は時間がたつと台形状のまま全体に濃度が低下し、分布幅は広がる。このように半径方向速度分布(放物線速度分布)は分散を広げる効果を持つ。

実際はこれらの理想条件の中間にあり、分子拡散係数 D_{AB} と対流の両方が関与する。このときは分子拡散は半径方向が支配的である。

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + u \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \right\} \quad (2.91)$$

この半径方向分子拡散は対流による軸方向の濃度の広がりを抑制し、平均濃度 $\bar{c}_A$ を正規分布形状とするような効果を持つ^{5, p. 105}。

以上のモデルを、毛細管内の遅い流れに関するトレーサー実験と比較しつつ厳密に解析したのが Taylor である。その結果は、円管内流れ方向の断面平均濃度 $\bar{c}_A(z)$ は 1 次元移流拡散の式:

$$\frac{\partial \bar{c}_A}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial z} = D_z \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial z^2} \quad (2.92)$$

で表せ、このみかけの混合拡散係数 D_z が分子拡散係数 D_{AB} 、平均流速 $\bar{u}$ 、管径 d_t と

$$D_z = \frac{(\bar{u} d_t)^2}{192 D_{AB}} \quad (2.93)$$

の関係にあるというものである。この関係は Aris により次式のように拡張された^{6, p. 310}。

$$D_z = D_{AB} + \frac{(\bar{u} d_t)^2}{192 D_{AB}} \quad (2.94)$$

この混合拡散係数を用いれば、時間 $t=0$ 、位置 $z=0$ におけるインパルス入力(トレーサー量 M [mol])の、位置 z における応答(軸方向平均濃度分布)は式(2.66)を用いて、

$$\bar{c}_A(z) = \frac{(M/\pi R^2)}{\sqrt{4\pi D_z t}} \exp\left(-\frac{(z-\bar{u}t)^2}{4D_z t}\right) \quad (2.95)$$

のように求められることになる。

式(2.94)を混合拡散係数と分子拡散係数の比にすると,

$$\frac{D_z}{D_{AB}} = 1 + \frac{(\bar{u}d_t)^2}{192(D_{AB})^2} = 1 + \frac{(Re \times Sc)^2}{192} \quad (2.96)$$

である。この関係を図 2.100 に示す。これより, 気相流れ ($Sc \approx 1$) で流速が小さい場合のみ, 混合は分子拡散が支配している。液相 ($Sc \approx 1000$) 流れや通常の流速範囲では, 管内の混合は対流が支配しており, 混合拡散係数 D_z は分子拡散係数 D_{AB} の 1000 倍以上であることがわかる。なお, Re の大きい乱流範囲では理論および実験的に概略

$$\frac{D_z}{D_{AB}} = 0.2(Re \times Sc) \quad (2.97)$$

である^{6, p. 310}。

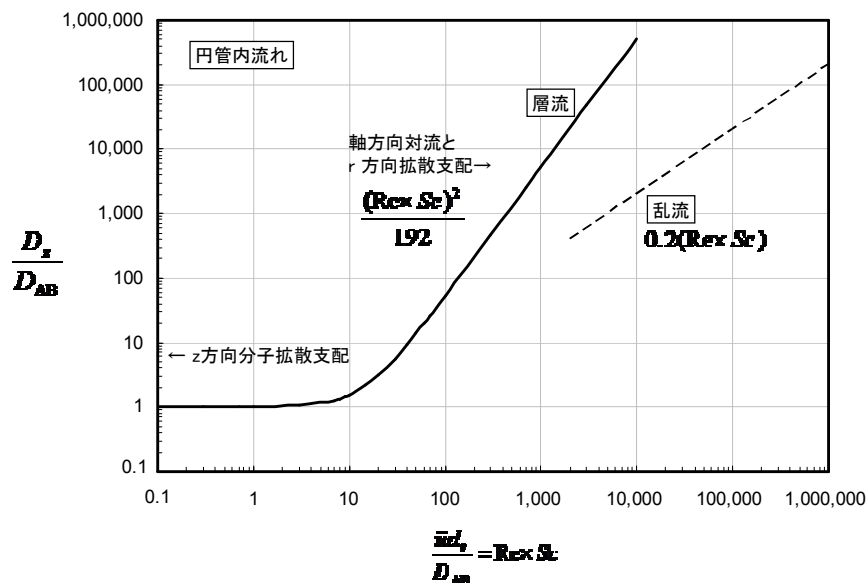


図 2.100 円管内流れの混合拡散係数と分子拡散係数の関係 (Taylor 分散)

【Excel 演習レポート 4】例題 2.24<diff14_temp.xls>を完成して, 1 ページ目のみプリントして提出。(吸収速度の計算, グラフは不要)

【筆記演習レポート 4】

円管内流れへの拡散問題の差分式で, 軸セルの差分式(式(3))を導け。