

教科書に微分方程式の記述があります。これは大学2年生の初め頃に出てくる内容ですので、工業力学第二ではその知識を要求しません。この資料は教科書等の記述を理解するための最小限の知識をまとめたものです。これを参考にして教科書等の記述を理解できると、運動力学の理解がより深く楽しくなります。是非、活用して下さい。ミスプリント等を指摘してくれた学生にはボーナスポイントを進呈します。

<  $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$  の一般解 >

$$1. \quad b^2 - 4ac > 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{or} \quad x = C_1 \sinh \lambda_1 t + C_2 \cosh \lambda_2 t \quad (1)$$

$$\text{但し, } \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

$$2. \quad b^2 - 4ac = 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \quad (2)$$

$$\text{但し, } \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

$$3. \quad b^2 - 4ac < 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \quad \text{or} \quad x = C_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + C_2) \quad (3)$$

$$\text{但し, } \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

< 補足&説明 >

- ・2階微分方程式の一般解は2つの1次独立な解の線形結合で表される。線形結合の係数は積分する際に必要となる積分定数に対応している。2階の微分方程式を解く操作には、2回積分することを含んでいる。したがって、2階の微分方程式には2つの任意定数が含まれる事になる。
- ・1次独立であるとは、「ある関数がある関数の線形結合（係数をかけて足し合わせたもの）で表せない」ことである。ロンスキアン行列式で1次独立性を確認できる。
- ・式(1)の場合、仮に  $x = e^{\lambda t}$  において微分方程式に代入すると解であることがわかり、さらに  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  より、その解が2つあることがわかる。一般解の唯一性があるため、一次独立な2つの関数  $x = e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$  の線形結合  $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  を作ればそれを一般解としてよいことになる。
- ・  $\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$  と  $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$  より式(1)の指数関数は双曲線関数でも表せる。
- ・上記2の場合、 $x = e^{\lambda t}$  において得られる解が1つしかないため、もう1つの解が必要になる。下記B項やC項の方法で見つけることができ、 $x = t e^{\lambda t}$  がもう一つの1次独立な解であることがわかる。
- ・式(3)について、以下のようにして  $b^2 - 4ac > 0$  の場合の解より求めることもできる。

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i \quad (\text{ここで } i \text{ は虚数単位.}) \text{ とおくと,}$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(\alpha + \beta i)t} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}), \quad \text{さらに } e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \text{ を用いると}$$

$$x = e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) = e^{\alpha t} \{C_1 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + C_2 (\cos \beta t - i \sin \beta t)\}$$

$$= e^{\alpha t} \{(C_1 + C_2) \cos \beta t + i(C_1 - C_2) \sin \beta t\}, \quad \text{任意の定数 } C_1 \text{ と } C_2 \text{ を } B_1 \text{ と } B_2 \text{ で書きなおすと,}$$

$$= e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) = B_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \text{となり, } B_1 \text{ と } B_2 \text{ も任意の定数である.}$$

$$x = B_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \text{ はさらに変形できて,}$$

$$= e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} \left( \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \cos \beta t + \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \sin \beta t \right)$$

$B_1$  と  $B_2$  に対して,  $\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} = \sin A$ ,  $\frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} = \cos A$  となるような  $A$  を見つけることができる.

$$x = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} (\sin A \cos \beta t + \cos A \sin \beta t) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t + A)$$

$A_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$  とおけば, 一般性を失うことなく, 任意の定数  $A_0$  と  $A$  を用いて

$$x = A_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + A) \text{ と表すことができる.}$$

参考：大学の学部で習う微分方程式のまとめ

### 1. 線形微分方程式

#### (1) 1 階線形微分方程式

- (a) 変数分離形 and それに帰着できる形
- (b) 同次形 and それに帰着できる形
- (c) 完全微分形

#### (2) 2 階線形微分方程式 {一般解} = {同次方程式の一般解} + {特解}

- (a) 定係数
- (b) 変係数
- (c) 特別な名前が付いているもの (ベッセル, ルジャンドル, etc...)

#### (3) n 階線形微分方程式 {一般解} = {同次方程式の一般解} + {特解}

### 2. 非線形微分方程式 (一般的には解けないが, 解析的に解ける例がいくつかある.)

- (1) オイラー型微分方程式
- (2) ベルヌーイ型微分方程式

### 3. 線形偏微分方程式

- (1) 拡散方程式 (熱伝導や物質の拡散を記述する方程式)
- (2) 波動方程式 (波, 光=電磁波, 電子等の粒子の振る舞いを記述する方程式→量子力学)
- (3) ポアソン方程式 (静電場, 表面張力でバランスする液体, 等を記述する方程式)

- A. ロンスキアン行列式 n 階微分方程式の一般解には n 個の未定定数 (自由度, 積分定数) がある
- B. 定数変化法 (階数低下法) (積分時に積分定数を入れると一般解も出てくる)
- C. 演算子法 (積分時に積分定数を入れると一般解も出てくる)
- D. 級数解法 整次式を係数に持つ常微分方程式

上記の用語とその内容が全て理解できておれば, 大学学部で習う微分方程式に関して最小限の知識があると思って良い. 特に, 1(2)(a) 2 階線形定係数同次微分方程式:  $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$  は, 力学では振動の問題で頻繁に使用する. 電気回路では LCR 回路の問題で頻繁に使用する. これらは 2 年生後期頃より習うフーリエ変換やラプラス変換につながって行くのでしっかりと勉強しておくこと.

- ・本稿は東京工業大学 4 類の 1 年の講義「工業力学第二」(高橋クラス) の受講学生の為の資料です.
- ・ミスプリント等を指摘してくれた学生にはボーナスポイントを進呈します.