

工業力学第二 演習問題集

<期末試験に関する重要な連絡>

- 期末試験では、教科書やノート類を持ち込むことが禁止されます。
- 試験は厳格に行われ、不正行為が発覚した場合は大学規定に従い対応されます。
- 期末試験では、この演習問題集の問題と類似の問題を出します。

<講義の進め方と学習の仕方>

- この問題集は講義内容に対応しています。講義内容と問題の対応表を以下に示します。
- 敢えて解答は配布しません。ほとんどの問題を講義中にとりあげて説明します。ノートをとって下さい。講義内容を理解すれば全て解答できる問題になっています。
- 説明を聞かないと理解に何倍も時間を要します。遅刻や欠席は大きな不利益になります。出席して講義を聴く事が重要です。講義中に内容を理解するよう心がけ、遠慮なく高橋や TA のみなさんに質問して下さい。
- やむをえない事情で遅刻や欠席をした時は、友人にノートを見せてもらって、この問題集を解く事である程度自習できます。しかし、講義に出席しその場で理解の方が遥かに短時間で深い理解を得られる事を認識して下さい。

<お願い>

- 誤り、ミスプリントやミスタイプ等を見つけた場合は高橋まで知らせて下さい。最初に知らせてくれた学生には成績加点のボーナスがあります。
- 誤解しやすい表現やより良い説明方法等、改善点を指摘してくれた学生には、内容に応じて成績加点のボーナスを進呈する場合があります。
- 成績優秀者の方々には、数年後（大学院在学中に）TA をお願いします（給料が出ます。東工大と正式な雇用関係を結ぶので履歴書に書けます。).

by 高橋邦夫

工業力学第二で学ぶ内容	…演習問題との対応	講義の 進度の 目安
1. 運動座標系からみた質点の運動とその方程式		0%
(ア) 並進運動座標系		
(イ) 回転運動座標系	…問 1,2 (導出)	
例題：メリーゴーランドからみた運動	…問 3	
例題：地表からみた運動	…問 4	
例題：自由落下による無重力実験（遠心力とコリオリ力）	…問 5	
例題：フーコー振り子	…問 6	
(ウ) 一般の（並進と回転）運動座標系	…問 7 (導出)	
2. 剛体の回転運動とその方程式		50%
(ア) 決まった回転軸のまわりの回転運動（スカラー）の方程式（2次元）		
① トルク，慣性モーメント，角運動量，角運動エネルギーの定義		
(イ) 任意の回転軸のまわりの回転運動（ベクトル&テンソル）の方程式（3次元）	…問 8 (導出)	
① トルク，慣性テンソル，慣性乗積，角運動量，角運動エネルギーの定義	…問 9	
例題：慣性テンソル（慣性モーメント，慣性乗積）の計算	…問 10	
② 対角化と主軸，主慣性モーメント	…問 11	
例題：滑車	…問 12	
例題：斜面を転がり落ちる剛体	…問 13	
例題：ジャイロ自転車		
3. 運動座標系からみた剛体の回転運動とその方程式		
(ア) 角運動エネルギーの表記が座標系によらない点	…問 14 (導出)	
例題：コマの歳差運動	…問 15	100%

1. 絶対座標系 (O-xyz 座標系) で記述 (観測) される運動方程式 $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$ がある. これを図 1-1 のように共通の原点を持つ運動座標系 (O- $\xi\eta\zeta$ 座標系) で記述したい. 以下の手順に従って運動座標系における運動方程式を導出せよ.

但し, どちらの座標系も直交座標系とする. 絶対座標系で表した位置 $\mathbf{r}$ に対して運動座標系で表した位置は $\mathbf{r}'$ で表す. 他の量も同様に「'」(ダッシュ記号) を用いて表わすこととする. 座標変換テンソルは $\mathbf{R}$ (すなわち, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$, もしくは, $\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}$) とする. また, $\mathbf{r}$ の時間に関する 1 階微分は $\dot{\mathbf{r}}$, 2 階微分は $\ddot{\mathbf{r}}$ と表すこととする. 特に, $\dot{\mathbf{r}}'$ は「 $\mathbf{r}'$ の時間に関する 1 階微分」を意味する事とし, 「運動座標系で表した $\dot{\mathbf{r}}$ 」を意味しない. 「運動座標系で表した $\dot{\mathbf{r}}$ 」は $\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}$ で表す. (下記の補足を参照のこと. 教科書「[よくわかる]工業力学」で用いている d/dt と d^*/dt の様な使い方はこの講義では用いない.) また, この教科書では, ベクトルの内積とテンソル積を見分けにくい, この講義では, ベクトルの内積を $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}$ のように表すこととする. 本講義では, 特に断らない限り, 絶対座標系のベクトルを太い小文字を用い,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{などと表し, 運動座標系のベクトルを } \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \text{ と表す. 同様にテンソ}$$

ルは太い大文字を用いて, $\mathbf{A}$ や $\mathbf{R}$, などと表すが, 頭の中では常に,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ や } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{x\xi} & R_{x\eta} & R_{x\zeta} \\ R_{y\xi} & R_{y\eta} & R_{y\zeta} \\ R_{z\xi} & R_{z\eta} & R_{z\zeta} \end{pmatrix}, \quad \text{などと認識して欲しい. 習慣上, 角運動量}$$

ベクトルのように大文字の太字でベクトルを表す場合もあるが, そのような場合は特に断って使用することにする. ベクトルはテンソルの一種なので, 上記の内積は $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$ とかける.

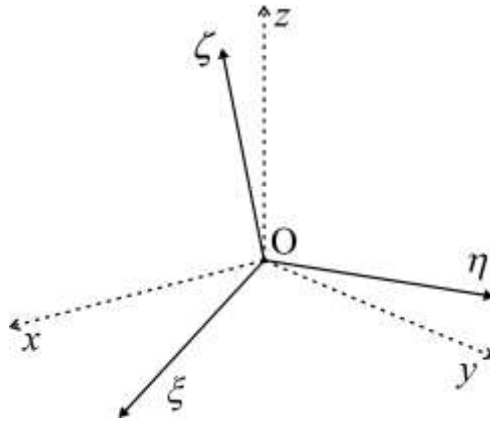


図 1-1 絶対座標系 (O-xyz 座標系) と共通の原点を持つ運動座標系 (O- $\xi\eta\zeta$ 座標系)

- (1) 上記の記述では $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ が成り立つことを前提としている. $\mathbf{R}$ が大きさを変えず, 任意の 2 つのベクトルの大きさと相対角度を維持しつつ, 方向のみ変える座標変換テンソルである時, $\mathbf{R}$ の逆テンソル ($\mathbf{R}^{-1}$) が $\mathbf{R}$ の転置テンソル ($\mathbf{R}^T$) に等しいこと (すなわち, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ が成り立つこと) を示せ (一般の座標変換テンソルは大きさや相対角度を変える場合があり, それらの場合はこの関係は成り立たない. 相対角度と大きさを保存する変換でしかこの関係は成り立たないことに注意せよ.). O-xyz 座標系と O- $\xi\eta\zeta$ 座標系の間の座標変換は大きさと相対角度を保存する変換である.

- (2) xyz 座標系で記述された運動方程式

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (1-1)$$

の両辺に左から $\mathbf{R}^T$ を作用させると,

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{f} = m \mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}} \text{ より}$$

$$\mathbf{f}' = m \mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}} \quad (1-2)$$

が求められる. 式(1-2)左辺は運動座標系で記述した力である. 式(1-2)右辺の $\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ を $\mathbf{r}'$ (運動座標系で記述した位置) およびその時間微分で表せば, 運動座標系で記述した運動方程式が得られる. $\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ に先立って, 先ず, $\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}$ から求めよう.

$\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ の両辺を時間で微分して,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \end{aligned} \quad (1-3)$$

が得られる. 今, 式(1-3)に現れた $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ は反対称テンソルである事を示せ.

- (3) あるテンソル $\mathbf{A}_{\text{anti-sym}}$ が反対称テンソルであるとき, 任意のベクトル $\mathbf{r}$ に対し,
 $\mathbf{A}_{\text{anti-sym}} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}$ となるベクトル $\boldsymbol{\omega}_A$ が存在する事を示せ.

- (4) 運動座標系で記述した運動方程式の導出に戻って, 上問の結果を用いると,

$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ となる $\boldsymbol{\omega}$ があるので, 式(1-3)はさらに変形できて

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ \text{となる. さらに, } \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T &= \mathbf{I}, \text{ および } \mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \text{ (なぜなら,} \\ \boldsymbol{\omega} \text{ と } \mathbf{r} \text{ の外積を } \mathbf{R}^T \text{ で座標変換したものは, あらかじめ } \mathbf{R}^T \text{ で座標変換した } \boldsymbol{\omega} \text{ と } \mathbf{r} \text{ の外積} \\ \text{に等しいはずだから.) なので, 上式はもうすこし変形できて,} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \mathbf{R} \cdot \{\mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \mathbf{R} \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \\ &= \mathbf{R} \cdot \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \end{aligned} \quad (1-4)$$

が得られる. これから $\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}$ が得られる. この式の両辺をもう一度時間に関して微分すると,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \end{aligned} \quad (1-5)$$

となる. ここで, 任意のベクトル $\mathbf{a}$ に対して, $\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{a}$ が成り立つことを示せ. ただし, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ 等と同様に, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}'$ とする.

- (5) 運動座標系で記述した運動方程式の導出に戻って, 前問の結果を用いると, 式(1-5)は

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \\ &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}' \times \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \end{aligned}$$

と変形できる. この式の第2項の微分を続けて,

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}' \times \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} \\
&= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}' \times \{(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'\} + \mathbf{R} \cdot \{(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') + \ddot{\mathbf{r}}'\} \\
&= \mathbf{R} \cdot [\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}' + (\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') + \ddot{\mathbf{r}}'] \\
&= \mathbf{R} \cdot [\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') + \ddot{\mathbf{r}}']
\end{aligned}$$

となる．これから $\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ が得られる．この式を式(1-2)に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}' &= m\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}} \\
&= m\{\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') + (\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') + \ddot{\mathbf{r}}'\}
\end{aligned}$$

と変形できて，運動座標系で記述した運動方程式は

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}' \quad (1-5)$$

であることがわかる．先述の運動方程式(1-1)

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

と比較すると，式(1-5)の左辺には外力による項以外に，3つの項が含まれる．

左辺第4項は座標系の角「加」速度による項であるので，座標系が一定速度で回転している時，ゼロとなる．左辺第2項は座標系の回転に起因する遠心力である．左辺第3項は何とよばれているか？

- (6) 図 1-1 の x 軸と ξ 軸のなす角を $\theta_{x\xi}$ ， x 軸と η 軸のなす角を $\theta_{x\eta}$ ，他の軸のなす角も同様に表すとする．座標変換テンソル $\mathbf{R}$ の成分をこれらの角度を用いて表せ．

補足：

ここで注意すべき点は，「微分した量をさらに座標変換した量」が，必ずしも，「座標変換した量を微分した量」とは限らない事にある．例えば，微分した位置（速度）を座標変換した量（運動座標系で表した速度）は

$$\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (1)$$

であるが，座標変換した位置（運動座標系で表した位置）を時間で微分した量は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \cdot (\dot{\mathbf{r}}) \quad (2)$$

である．式(1)と式(2)には，式(2)第一項の分だけの差が有ることが分かる．

参考までに，微分と転置に関しては順序交換して良い．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^T) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R} \right)^T \quad (3)$$

注意点：

微分と転置は順序交換できるが，**微分と座標変換**の順序交換はできない．

（微分と座標変換の混在する式では，作用順序のわかる表記が必要である．）

$\dot{\mathbf{r}}'$ は「 $\mathbf{r}'$ の時間に関する1階微分」を意味する．

2. 絶対座標系 ($O\text{-}xyz$ 座標系) から観測される運動方程式 $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$ を図 2-1 に示すような同じ原点をもつ運動座標系 ($O\text{-}\xi\eta\zeta$ 座標系) から観察される物理量で記述すると

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$$

となる．但し，絶対座標系から観察される位置 $\mathbf{r}$ に対して運動座標系から観察される位置は $\mathbf{r}'$

で表すこととし、他の物理量も同様に運動座標系から観察した場合は「'」（ダッシュ記号）を付けて表わしている．以下の問では、具体的なイメージを掴むための例として、一定速度で回転する運動座標系の例（メリーゴーランド座標系と地表座標系）を取り上げているが、上記の運動方程式は回転の角速度が変化する系に対しても成り立つ事を説明せよ．

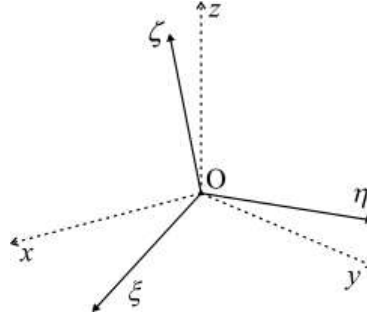


図 2-1 絶対座標系（O-xyz 座標系）と共通の原点を持つ運動座標系（O-ξηζ 座標系）

3. 図 3-1 に示すような絶対座標系（O-xyz 座標系）と運動座標系（O-ξηζ 座標系）がある．ζ 軸は常に z 軸と等しく、ξ 軸は x 軸方向から y 軸方向に向かって一定の角速度 ω で運動している．すなわち、時間を t として ξ 軸と x 軸のなす角は ωt である．絶対座標から観測される運動方程式 $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$ を運動座標から観察すると

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$$

とあらわせる．ここで、絶対座標系から観察される位置 $\mathbf{r}$ に対して運動座標系から観察される位置は $\mathbf{r}'$ で表し、他の物理量も同様に運動座標系から観察した場合は「'」（ダッシュ記号）を付けて表わしている．以下の問いに答えよ．

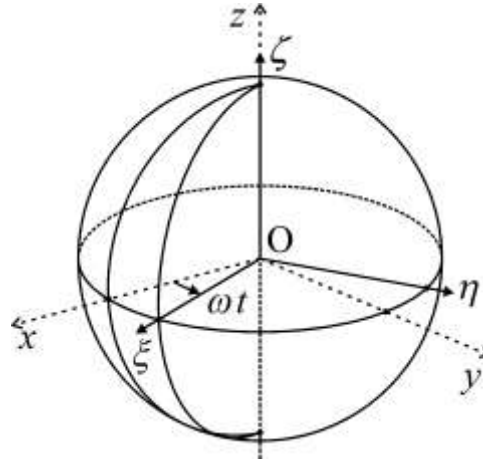


図 3-1 絶対座標系（O-xyz 座標系）と運動座標系（O-ξηζ 座標系）

- (1) 座標変換テンソルを $\mathbf{R}$ とし、 $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ の関係があるとする． $\mathbf{R}$ の成分を ωt の式で表せ．
- (2) $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ の成分を表せ．
- (3) $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を ω の式で表せ．
- (4) 任意の $\mathbf{r}$ に対して、 $\mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$ を示せ．
- (5) $(\dot{\mathbf{R}}^T)^T = \dot{\mathbf{R}}$ を示せ．ここで、 $(\dot{\mathbf{R}}^T)^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^T) \right\}^T$ としている．
- (6) 任意の $\mathbf{r}$ に対して、 $\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ を ξ, η, ζ 、および ω の式で表せ．
- (7) 運動座標から観察される運動方程式を外力 $\mathbf{f}'$ 、質量 m 、 ξ, η, ζ 、および ω の式で表せ．

4. 図 4-1 に示すような絶対座標系 ($O\text{-}xyz$ 座標系) と運動座標系 ($O\text{-}\xi\eta\zeta$ 座標系) がある. ζ 軸は z 軸から $(\pi/2 - \alpha)$ (rad) だけずれており, z 軸は $\xi\zeta$ 面上にある. $\xi\zeta$ 面は z 軸まわりに角速度 ω で回転運動している. 絶対座標から観測される運動方程式 $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$ を運動座標から観測すると $\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$ とあらわせる. ここで, 絶対座標系から観測される位置 $\mathbf{r}$ に対して運動座標系から観測される位置は $\mathbf{r}'$ で表し, 他の物理量も同様に運動座標系から観測した場合は「'」(ダッシュ記号) を付けて表わしている. 以下の問いに答えよ.

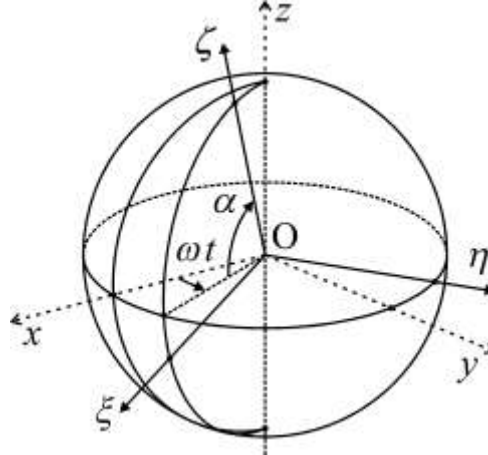


図 4-1 絶対座標系 ($O\text{-}xyz$ 座標系) と運動座標系 ($O\text{-}\xi\eta\zeta$ 座標系)

- (1) 座標変換テンソルを $\mathbf{R}$ とし, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ の関係があるとする. $\mathbf{R}$ の成分を ωt と α の式で表せ.
 - (2) $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ の成分を表せ.
 - (3) $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を ω の式で表せ.
 - (4) 任意の $\mathbf{r}$ に対して, $\mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$ を示せ.
 - (5) $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^T) \right\}^T = \dot{\mathbf{R}}$ を示せ.
 - (6) 任意の $\mathbf{r}$ に対して, $\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ を ξ, η, ζ , および ω の式で表せ.
 - (7) 運動座標から観測される運動方程式を外力 $\mathbf{f}'$, 質量 m , ξ, η, ζ , および ω の式で表せ.
5. 炭鉱を利用した無重力実験施設の設計をしたい. 図 5-1 に示す $O\text{-}xyz$ 座標系と $O\text{-}\xi\eta\zeta$ 座標系を利用する. 絶対座標系で表した位置 $\mathbf{r}$ に対し, 運動座標系で表した位置を $\mathbf{r}'$ で表す. 他の量も同様に「'」(ダッシュ記号) を用いて表わすこととする. 炭鉱は北緯 α (rad) の地点にあるとする. 炭鉱の穴の深さ D は地球の半径 R_E に比べ無視できるほど小さい ($D \ll R_E$) ため, 穴の中では重力加速度は一定値 g とみなせるとする. 地球の自転の角速度は ω で一定とし, 時間は t で表すこととする. 落下させる実験設備は質点とみなせ, 空気の摩擦は無視できるとする. 以下の問いに答えよ.

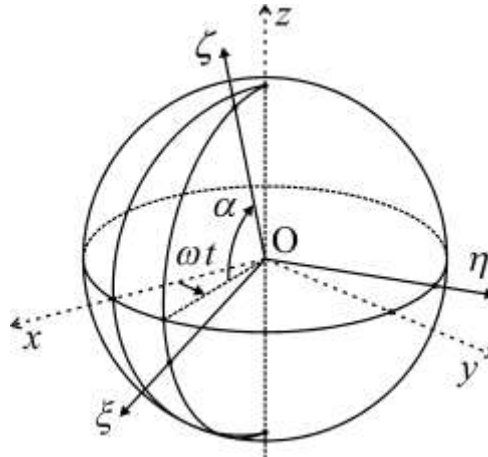


図 5-1 絶対座標系 (O-xyz 座標系) と運動座標系 (O-ξηζ 座標系)

- (1) 座標変換テンソルを $\mathbf{R}$ とし, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ の関係があるとする. $\mathbf{R}$ の成分を ωt の式で表せ.
 - (2) 運動座標系における運動方程式は $\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$ で表せる. この問題の場合は, 左辺第 1 項から順に重力, 遠心力, コリオリ力, 角加速度による力である. これらのうち大きさがゼロとなるものはどれか? 理由も説明すること.
 - (3) 遠心力によって落下物は東西南北のうちどちらの方向にずれるか? (ずれない場合は「ずれない」と回答せよ.) 理由も説明すること.
 - (4) コリオリ力によって落下物は東西南北のうちどちらの方向にずれるか? (ずれない場合は「ずれない」と回答せよ.) 理由も説明すること.
 - (5) 角加速度による力によって落下物は東西南北のうちどちらの方向にずれるか? (ずれない場合は「ずれない」と回答せよ.) 理由も説明すること.
6. 以下はフーコー振り子 (Foucault's Pendulum) に対する微分方程式を求める手順である. 各問に答えよ. 図 6-1 の球を半径 R の地球とみなし z 軸を自転軸とする. 地球の自転の角速度は ω である. 振り子の運動を地表 (すなわち球の表面) で観測する. 観測点の北緯は α (rad) である. 図の様に運動座標系 $O-\xi\eta\zeta$ をとる. 図 6-2 のように ξ 軸と η 軸を含む面に ζ 軸と垂直な d 軸をとり, 振り子は ζ 軸と d 軸を含む破線の面内で振れるとする. その時, ξ 軸と d 軸の角度を φ とする. その破線の面を面に垂直な方向から見て書いたのが図 6-3 である. O は地球の中心で $\zeta = R$ の位置が地表である. 質量 m の重りが長さ L の糸で点 P よりぶら下げられている. 糸に加わる張力を T とする. 重りや糸に対する空気抵抗は無視する. $L \ll R$ であるので重力加速度は g で一定とみなせるとする.

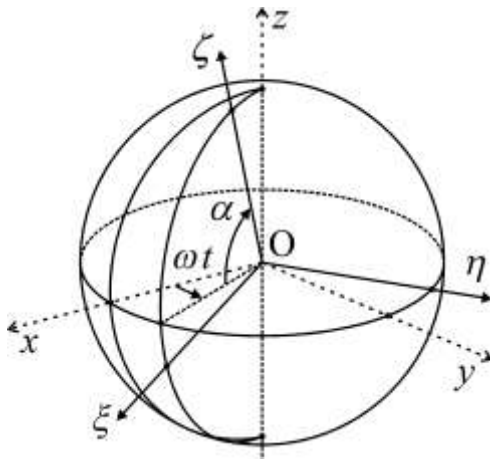


図 6-1 運動座標系の取り方

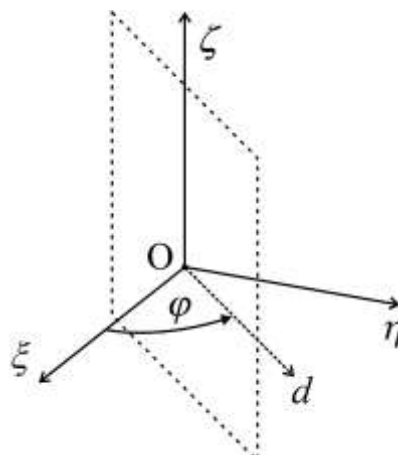


図 6-2 振り子の振れる面

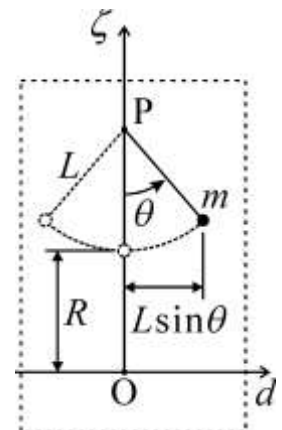


図 6-3 質点の運動

- (1) 重りに加わる ζ 方向の力を求めよ (本文中の記号を用いて表せ.).
- (2) 重りに加わる d 方向の力を求めよ (本文中の記号を用いて表せ.).
- (3) 前問で求めた力から, 重りに加わる ξ 方向の力と η 方向の力を求めよ (本文中の記号を用いて表せ.).
- (4) 質点の位置を $\mathbf{r}$ で表すと, 運動座標系から見た質点の運動方程式は
$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$$
と表せる. $\mathbf{f}'$ は(1)~(3)の間より得られている. $\boldsymbol{\omega}'$ を本文中の記号を用いて表せ.
- (5) $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ とすると, $\xi = L \sin \theta \cos \varphi$ である. 同様に η と ζ も求めよ (本文中の記号を用いて表せ.).
- (6) $\xi\eta\zeta$ に前問の答えを代入し, それを時間に関して微分し, $\dot{\mathbf{r}}'$ を求めよ. その際, どの記号が時間と共に変化する変数であるか注意する事.
- (7) 前問の答えをさらにもう一度時間に関して微分し, $\ddot{\mathbf{r}}'$ を求めよ.
- (8) 運動方程式 $\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$ はベクトルに対する微分方程式なので 3 つの成分を持つ. 前問までの結果をこの運動方程式に代入すると, 3 つの微分方程式が得られる. この 3 つの微分方程式を書け.
- (9) 前問で導いた 3 つの微分方程式には時間の関数となる 3 つの変数が含まれる. その 3 変数を書け.

注意: 3 変数に対して 3 方程式がある. もし, これらの方程式を連立して解くことができれば, 振り子の運動を知ることができるであろう. 但し, 方程式は微分方程式となるので諸君らは未だ解くことができない. 2 年次になる頃より微分方程式の解法を習うのでしっかり勉強すること. 現在習っている数学はその基礎となるので, やはりしっかりと勉強しておくこと. フーコー振り子の方程式の解についての教科書における説明は, 頁数が限られているせいか, 不十分なものが多い. 疑問を持ったり深く理解したい学生には「解説: フーコー振り子の考察」「解説: 力学でよく使う微分方程式」などの資料を用意しているので高橋に問い合わせること.

7. 絶対座標系 (O -xyz 座標系) で記述 (観測) される運動方程式 $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$ がある. これより, 図 7-1 のように異なる原点を持つ運動座標系 (O' - $\xi\eta\zeta$ 座標系) で記述 (観察) される運動方程式を導出せよ. 但し, どちらの座標系も直交座標系とする. 絶対座標系で表した位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対して運動座標系で表した位置ベクトルは $\mathbf{r}'$ で表す. 運動座標系の運動は併進運動 $\mathbf{r}_0$ と回転運動の和で表せる. 回転運動を表す座標変換テンソルは $\mathbf{R}$ とし, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$ と表せるとする. (疑問を持ったり深く理解したい学生には「解説: 回転併進系の EM」を用意しているので高橋に問い合わせること.)

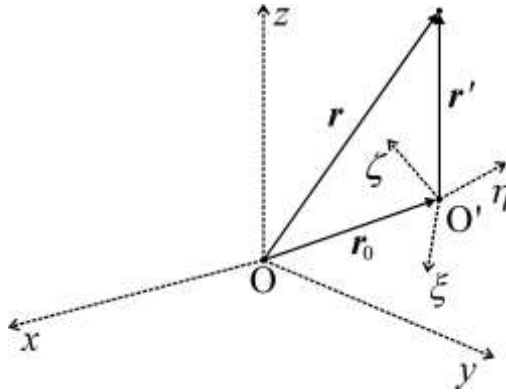


図 7-1 絶対座標系 (O-xyz 座標系) と異なる原点を持つ運動座標系 (O'-ξηζ 座標系)

8. 以下の各問に答えながら，剛体の回転運動に対する運動方程式を導出せよ．

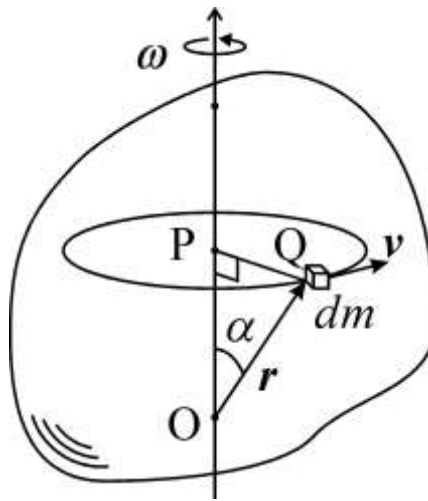


図 8-1 回転軸の周りに回転する剛体

- (1) 図 8-1 の様に剛体が原点 O を通る軸の周りに角速度 ω で回転している．その角速度ベクトルを ω とする．位置ベクトル $\mathbf{r}$ で示される位置にある質量 dm の微小体積に働く力を $d\mathbf{f}$ とする．微小体積の速度 $\mathbf{v}$ は $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r}$ である． $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ となる理由を説明せよ．

- (2) 微小物体の運動方程式は

$$d\mathbf{f} = (dm)(\ddot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}}dm \quad (8-1)$$

この式の両辺の左から $\mathbf{r}$ を外積として作用させると

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{f} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}dm$$

となる．この式を剛体全体にわたって足し合わせると，体積積分をとることになり，

$$\int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f} = \int_V \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}dm \quad (8-2)$$

となる，但し，ここで ρ を剛体の密度とすると， $\int_V dm = \rho \iiint_V dx dy dz$ と表わすこともで

きる．式(8-2)の左辺は何と呼ばれる物理量か答えよ．

- (3) 式(8-2)の右辺の中に現れる $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ について変形すると， $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ (ゼロベクトル) より，

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}))$$

となる．ここで，一般に，任意のベクトル $\mathbf{r}$ および $\mathbf{a}$ に対し，

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2 \mathbf{a} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{r} \quad (8-3)$$

が成り立つことを示せ．図 8-2 を利用して良い．

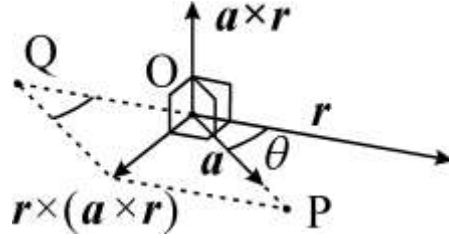


図 8-2 各ベクトルとそれらの外積

- (4) 式(8-2)の右辺の中に現れる $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ について前問の結果を利用してさらに変形すると，

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \frac{d}{dt} \{ |\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} \}$$

となる．式(8-2)にこの式を代入して変形すると

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f} &= \int_V \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} dm = \int_V \frac{d}{dt} \{ |\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} \} dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \{ |\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} \} dm \end{aligned}$$

ここで， $\int_V \{ |\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} \} dm = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ とおけることを示し， $\mathbf{I}$ はなんという物理量が答えよ．

- (5) $\mathbf{L} \equiv \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ と定義する． $\mathbf{L}$ (ベクトル量) はなんと呼ばれる物理量か？

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \text{とおいたとき，}$$

また $\mathbf{I}$ の各成分は何と呼ばれるか？

- (6) 回転運動に対する運動方程式を完成させると， $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ となることを示せ．但し， $\mathbf{N}$ はトルク， $\mathbf{L}$ は角運動量であり，どちらもベクトル量である．
 (7) 回転運動に対する運動エネルギーは

$$dE = \frac{1}{2} (dm) |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 dm$$

と表せるので，これを回転体全体にわたって足し合わせると，

$$E = \int_V dE = \frac{1}{2} \int_V |\mathbf{v}|^2 dm = \frac{1}{2} \int_V |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 dm \quad (8-4)$$

となる．回転運動の運動エネルギーすなわち式(8-4)の右辺が

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{L} \quad (8-5a)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{L} \quad (8-5b)$$

に等しいことを示せ．

- (8) 運動がある面内に限られる時の回転運動に対する運動方程式 (2次元の回転運動に対する運動方程式) は， $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}}$ と表せる事を説明せよ．その際，一般の回転運動に対する運動方程式 $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ を $\mathbf{N} = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$ と表してはいけない理由も説明せよ．

9. 以下の問いに答えよ．

- (1) 図 9-1 に示す円板状の物体は xy 面に並行な平面を持ち、半径は R 、厚さは $2T$ である。その物体の重心 G は z 軸上にあり、原点より H だけ離れている。この物体は一様な物質からできており、その密度は ρ である。この物体の慣性テンソルを求めよ。

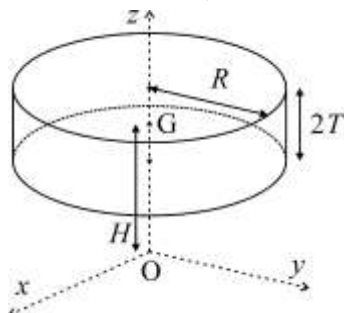


図 9-1

- (2) 図 9-2 に示す板状の物体がある。各面は各軸に垂直である。重心 G は z 軸上にあり、原点より H だけ離れている。各辺の長さは図に示す通りである。この物体は一様な物質からできており、その密度は ρ である。この物体の慣性テンソルを求めよ。

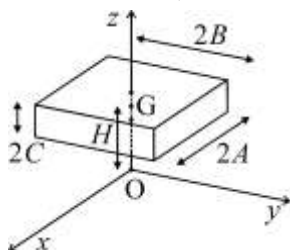


図 9-2

- (3) 図 9-3 に示す円柱状の物体は z 軸平行な回転対称軸を持っているが、その対象軸は z 軸から D だけ離れている。この物体は一様な物質からできており、その密度は ρ である。この物体の z 軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

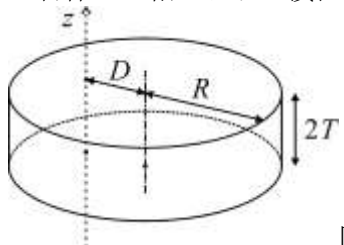


図 9-3

- (4) 図 9-4 に示す物体の各面は各軸に垂直である。重心 G の座標は (a, b, c) であり、原点 O とは異なる。各辺の長さは図に示す通りである。この物体は一様な物質からできており、その密度は ρ である。この物体の慣性テンソルを求めよ。

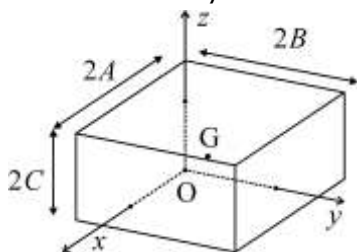


図 9-4

- (5) 原点 O とは異なる座標 (a, b, c) に重心 G を持つ半径 R の球がある。この物体は一様な物質からできており、その密度は ρ である。この物体の慣性テンソルを求めよ。

10. 慣性テンソル $\mathbf{I}$ の物体がある．回転運動の運動方程式は $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ なので，微小時間 dt の間トルク $\mathbf{N}$ を加えると角運動量が変化する．その変化は $\mathbf{N}dt = d\mathbf{L}$ と表せる．トルクによって発生する角運動量 $\mathbf{L}$ の変化分 $d\mathbf{L}$ がトルクと平行なベクトル $\mathbf{N}dt$ で表せることを意味している． $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ であるが，慣性テンソルは座標系の取り方で異なる事を思い出そう．トルクによって発生する角速度の変化（角加速度）はいつもトルクと並行とは限らない．但し，ある方向にトルクを加えて回転させると同じ方向の角加速度が発生する特別な場合がある．その特別な方向 $\boldsymbol{\omega}$ を求めるにはテンソル $\mathbf{I}$ に対し， $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$ を満たすスカラー λ とベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を求めればよい．何故なら，この場合， $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt}(\lambda \boldsymbol{\omega}) = \lambda \dot{\boldsymbol{\omega}}$ となるからである．このような $\boldsymbol{\omega}$ は物体の形によって決まる特別な方向のベクトルになるはずである．そこで，そのような特別な回転方向の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ でなく $\boldsymbol{\mu}$ で表すこととする．

今， $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda \boldsymbol{\mu}$ を満たすスカラー λ とベクトル $\boldsymbol{\mu}$ を求めたい． $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda \boldsymbol{\mu}$ より $(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ が得られる．テンソル $(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E})$ が逆テンソルを持てば， $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ となってしまうので $(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E})$ は逆テンソルを持たない．したがって， $\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ が得られる．すなわち，

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} (I_x - \lambda) & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & (I_y - \lambda) & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & (I_z - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (10-1)$$

この方程式は特性方程式と呼ばれる．この特性方程式は 3 次方程式である．特性方程式は 3 つの解をもつ．それらを $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおく（重根になる場合はあとで考えよう．）

- (1) 「 $\mathbf{I}$ が対称テンソルであれば特性方程式の解は実数となる」すなわち「対称行列の固有値は全て実数となる事」を示せ．必要であれば，以下の定理を用いて良い．

定理：複素数 z_1 および z_2 に対し， $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ である．

証明：

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i \quad \text{とおくと}$$

$$z_1^* = x_1 - y_1 i, \quad z_2^* = x_2 - y_2 i \quad \text{となるので，}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \quad \text{となる．したがって，与式の}$$

$$\text{左辺：} (z_1 z_2)^* = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

$$\text{左辺：} z_1^* z_2^* = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

$$\therefore (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

（証明終わり）

$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して $\boldsymbol{\mu}$ もやはり 3 つの解が求められる．それらを $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ とおく． $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ をすべて単位ベクトルとしても一般性を失わないので，以降， $\boldsymbol{\mu}$ は単位ベクトルとする．数学では $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を固有値， $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ を固有ベクトルとして学習する．

- (2) 特性方程式の解が重根にならない場合，その解から求められる $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ は互いに直交する事を示せ．（Text p.228(*18)参照．）

$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\mu}_1$ ， $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{\mu}_2$ ， $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu}_3 = \lambda_3 \boldsymbol{\mu}_3$ が成り立つので，

に対し，テンソル $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{1x} & \mu_{2x} & \mu_{3x} \\ \mu_{1y} & \mu_{2y} & \mu_{3y} \\ \mu_{1z} & \mu_{2z} & \mu_{3z} \end{pmatrix}$ を定義すると，

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{1x} & \mu_{2x} & \mu_{3x} \\ \mu_{1y} & \mu_{2y} & \mu_{3y} \\ \mu_{1z} & \mu_{2z} & \mu_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1x} & \mu_{2x} & \mu_{3x} \\ \mu_{1y} & \mu_{2y} & \mu_{3y} \\ \mu_{1z} & \mu_{2z} & \mu_{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$$

$$\text{ここで } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ とした.}$$

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$ の両辺に右から $\mathbf{M}^{-1}$ を作用させると

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$

が得られる. $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{M}$ は対角化された慣性モーメントと呼ばれ, 対角項以外が 0 (ゼロ) となる. この関係は, $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$ とも書けるので, 対角化された慣性モーメント

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ を } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{1x} & \mu_{2x} & \mu_{3x} \\ \mu_{1y} & \mu_{2y} & \mu_{3y} \\ \mu_{1z} & \mu_{2z} & \mu_{3z} \end{pmatrix} \text{ で座標変換すると慣性テンソル } \mathbf{I} \text{ となる事を意}$$

味している. この観点から剛体の力学においては, この固有値 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を主慣性モーメントと呼び, 固有ベクトル $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ を慣性主軸と呼ぶ.

ここで, 座標変換 $\mathbf{M}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ に変換し, $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ の大きさは各々 1 で, 互いに直行する. したがってこの座標変換 $\mathbf{M}$ は任意の 2 つのベクトルの相対角度を保存しながら, ベクトルの大きさを変えずに回転させる座標変換である. したがって, 問題 1(1) と同じ理由で

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$$

である.

- (3) 任意のベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{a}'$ に座標変換するテンソル $\mathbf{P}$ を定義する (すなわち, $\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ である. 移動座標系から見た運動方程式を導出する際にもちいた $\mathbf{R}$ ($\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$) とは表し方が逆なので注意すること. また, $\mathbf{R}$ は直交する座標系を, 回転させて直交する座標系に変換する座標変換テンソルであるため, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ が成り立っていた. しかし, $\mathbf{P}$ は一般の座標変換であるため, 逆テンソル $\mathbf{P}^{-1}$ と転置テンソル $\mathbf{P}^T$ が等しいとは限らない. $\mathbf{P}$ はより一般的な座標変換である点に注意を払ってもらうため, ここでは以前使った座標変換テンソルを $\mathbf{R}$ ではなく $\mathbf{P}$ で表している. 任意のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, および任意のテンソル $\mathbf{A}$ の間に $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$ の関係がある時, $\mathbf{b}' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{a}'$ の関係を満たす $\mathbf{A}'$ は「 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{P}$ で座標変換したテンソル」と呼ぶことができる. この $\mathbf{A}'$ は, $\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ と表せることを示せ.

<参考>

座標変換が $\mathbf{R}$ の時, $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ より $\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}$ なので, 任意のテンソル $\mathbf{A}$ を座標変換したテンソルは $\mathbf{A}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{R}^T)^{-1} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ である.

$$(4) \text{ 慣性テンソル } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ の物体に対し, 主慣性モーメントを求めよ.}$$

- (5) 慣性テンソル $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の物体に対し、慣性主軸方向を求めよ。

次に慣性モーメントが重根を持つ場合を考えよう。

- (6) 慣性モーメントが 3 重根をもつような形状を 1 つ挙げよ。
 (7) 慣性モーメントが 2 重根をもつような形状を 1 つ挙げよ。

球や円筒の慣性テンソルや、それを座標変換したものの慣性テンソルの場合を考えればわかるように、重根を持つ場合、慣性主軸は無いのではなく、無限にあるため 1 つに決められないだけである。何らかの $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ を互いに直交するように選べば、重根を持たない場合と同じ議論が成り立つ。

球の場合を例にあげると、

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{pmatrix} \text{ なので、特性方程式は } (\lambda - I_0)^3 = 0.$$

$\lambda = I_0$ となり、 λ は 1 種類しか得られない。しかし、例えば

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、これら $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3$ は、 $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda \boldsymbol{\mu}$ を満足し、これら $\boldsymbol{\mu}$ の方向にトルクを与えても角速度ベクトルの方向は変わらない。

回転体に外部からトルクが加えられない場合でも、回転する物体の形が変化すると角速度の向き（つまり回転方向）は変わる。体操の選手は空中で前後の回転の後にひねり動作を行う際、手足の動作で慣性テンソルを変え（角運動量ベクトルは変えずに角速度ベクトルを変えて、）回転方向を変えているのである。

11. 図 11-1 に示す質量 M 慣性モーメント I 半径 R の滑車にロープをかけ、ロープの片方は Q 点で天井に固定されている。 P 点を力 T で引き上げると滑車は上昇する。滑車上昇の加速度を求めよ。ロープは伸び縮みせず、重さも無視でき、滑車とロープの接触部は滑らないとする。

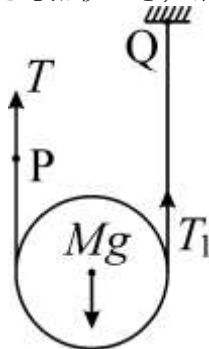
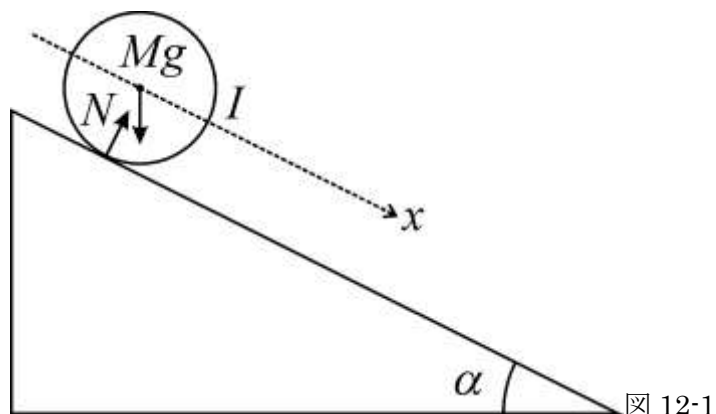


図 11-1

12. 質量 M 慣性モーメント I 半径 R 円板が角度 α の斜面を転がりおちる。斜面に水平方向に x 軸をとる。
 (1) 円板は斜面を滑らないとし、円板の x 方向の加速度を求めよ。

- (2) 接触部には摩擦力 F_{fr} が働くが、接触部に働く垂直力を N とするとき、 $F_{\text{fr}} \geq \mu_{\text{fr}} N$ (ここで、 μ_{fr} は静摩擦係数である。) の時接触部は滑る。斜面の角度 α が小さいと円板は滑らず転がるが、斜面の角度 α がある値をこえると円板はすべり始める。その限界の角度を求めよ。



13. 図 13-1 は機械工学リテラシー「ものをあやつる」でみなさんが作製したジャイロ自転車のジャイロ効果を模式的に表したもので、 x 軸が自転車の進行方向である。自転車が傾き、重力によって図に示すようなトルク $\mathbf{N}$ が発生すると、ジャイロを固定したハンドルはどちらの方向に回るか？回転運動の運動方程式 $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ を用いて説明せよ。

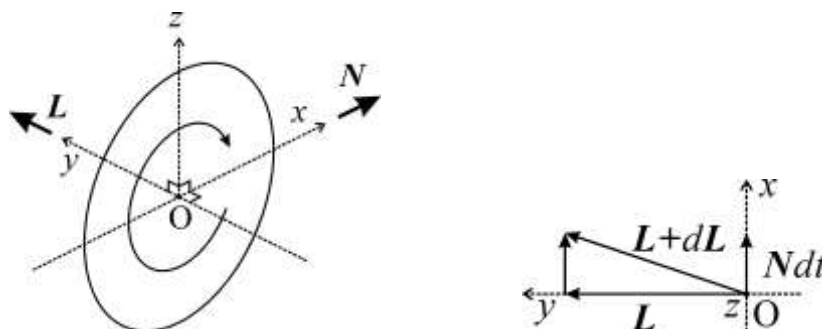


図 13-1 回転する円板に加わるトルクにより、円板の角運動量が変化する。

14. 絶対座標系 ($O\text{-}xyz$ 座標系) から記述した回転運動の運動方程式は $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ である。以下の問いにこたえて、それを図 14-1 に示すような運動座標系 ($O\text{-}\xi\eta\zeta$ 座標系) から記述したい。以下の手順に従って運動座標系における運動方程式を導出せよ。
但し、どちらの座標系も直交座標系とする。絶対座標系で表した位置 $\mathbf{r}$ に対して運動座標系で表した位置は $\mathbf{r}'$ で表す。他の量も同様に「'」(ダッシュ記号) を用いて表わすこととする。座標変換テンソルは $\mathbf{R}$ (すなわち、 $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$ 、もしくは、 $\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}$) とする。また、 $\mathbf{r}$ の時間に関する 1 階微分は $\dot{\mathbf{r}}$ 、2 階微分は $\ddot{\mathbf{r}}$ と表すこととする。

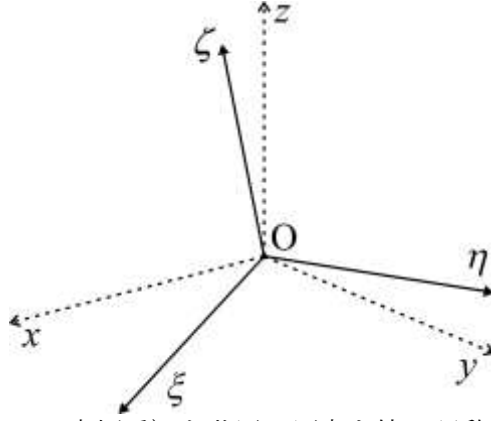


図 14-1 絶対座標系 (O-xyz 座標系) と共通の原点を持つ運動座標系 (O-ξηζ 座標系)

- (1) 座標変換の定義より角運動量に対しても $\mathbf{L} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}'$ が成り立つ. 両辺を微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L}' + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{L}}' \\ &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{L}}'\end{aligned}$$

となる. この座標変換テンソル $\mathbf{R}$ と任意のベクトル $\mathbf{a}$ に対し $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{a}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{\mu}$ が有る事を示せ.

- (2) 上記の結果を用い, $\xi\eta\zeta$ 座標系から見た運動方程式が $\mathbf{N}' = \boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{L}' + \dot{\mathbf{L}}'$ と記述できることを示せ.

- (3) 運動エネルギーを xyz 座標系で表すと

$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{L}$ であつたが, これを $\xi\eta\zeta$ 座標系から見た量で表すと同様に

$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \circ (\mathbf{I}' \cdot \boldsymbol{\omega}') = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \circ \mathbf{L}' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \cdot \mathbf{L}'$ と表せる事を示せ. つまり, 運動エネルギーの表し方は座標系に依らないことを示せ.

15. 原点 O で軸を支えられたコマが歳差運動(precession)している. 原点からコマの重心までの距離は H , 重力加速度は g である. 図 15-1 のようにコマの回転軸を ζ 軸とし ζ 軸は z 軸から $(\pi/2 - \alpha)$ (rad)傾いているとする (但し, $0 < \alpha < \pi/2$ とする.). $\xi\zeta$ 面が z 軸のまわりに角速度 $\boldsymbol{\mu}$ で回転しているとする. この回転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ は z 軸方向を向いている. コマの自転の角速度 $\boldsymbol{\lambda}$ は ζ 軸を向いており, 大きさは $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$ であるとする. $\xi\eta\zeta$ 座標系で記述した運動方程式は $\mathbf{N}' = \boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{L}' + \dot{\mathbf{L}}'$ なのでこれに各パラメーターを代入して方程式を完成させ, 歳差運動の方程式を得たい. 以下の問いに答えよ.

但し, $\boldsymbol{\mu}$ や $\boldsymbol{\lambda}$ は一定とは限らないのは当然として, α も一定とは限らない事に注意せよ. 問 1 で導出した移動座標系における運動方程式は α が一定で無くても成立する. 地表座標系の例では, α を一定と言う特別な場合に導出した方程式が成り立つことを確認しただけなので, 混乱しないようにする事.

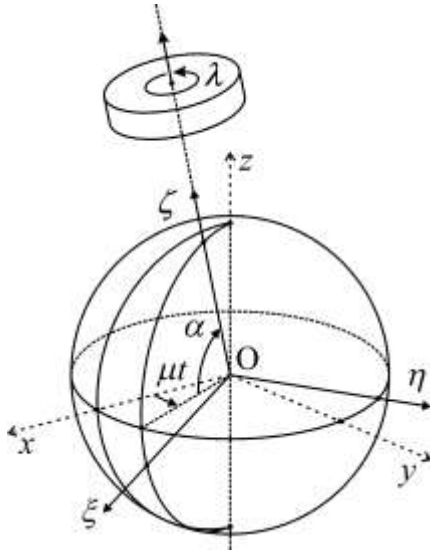


図 15-1 歳差運動の全体図

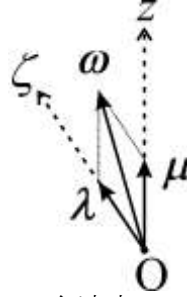


図 15-2 角速度ベクトル

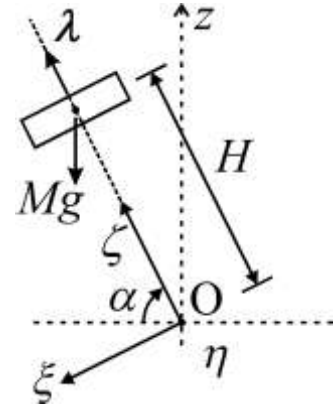


図 15-3 歳差運動の断面図

- (1) 空気抵抗や摩擦は無視できるとすると、コマに加わる外力は重力および原点から受ける反力のみである．コマに加わるトルク $\mathbf{N}'$ を $\xi\eta\zeta$ 座標系で表せ．
- (2) コマの角速度は絶対座標系からみると $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}$ であり，運動座標系からみると $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\mu}'$ である（図 15-2 参照）．歳差運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ は z 軸方向を向いているので $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$ と表せる． $\xi\eta\zeta$ 座標系で記述した歳差運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu}'$ を本文中

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

の記号を用いてあらわせ．また， $\xi\eta\zeta$ 座標系で記述した自転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\lambda}'$ を本文中の記号を用いてあらわせ．

- (3) 前問よりコマの角運動量 $\mathbf{L}$ の角運動量 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\mu}'$ が得られる．慣性テンソルを

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} I_{\xi} & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\xi\eta} & I_{\eta} & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\xi\zeta} & -I_{\eta\zeta} & I_{\zeta} \end{pmatrix}$$

とおくと，9 個の成分のうちいくつかは 0（ゼロ）になる．どれが 0（ゼロ）になるか？また，0（ゼロ）にならない成分のうちいくつかは等しい値になる．等しくなる成分はどれか？

- (4) $\mathbf{L}'$ および $\dot{\mathbf{L}}'$ を本文中の記号を用いてあらわせ．
- (5) $\boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{L}'$ を本文中の記号を用いてあらわせ．
- (6) 運動座標系からみた運動方程式 $\mathbf{N}' = \boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{L}' + \dot{\mathbf{L}}'$ より，歳差運動を記述する 3 方程式を導出し，解け．

この結果より，支点から重心までの長さ H が同じコマの場合，円筒部の半径 R が大きい程ゆっくりと歳差運動することがわかる．1 年時のジャイロ自転車を用いたコマを用いて，是非，確認してみたい。

<まとめ>

質点の運動方程式

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{P}}$$

絶対座標系

$$\mathbf{f}' - m\ddot{\mathbf{r}}_0 = m\ddot{\mathbf{r}}'$$

並進座標系

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}'$$

回転運動座標系

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') - m(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'_0 + \dot{\mathbf{v}}'_0) = m\ddot{\mathbf{r}}'$$

並進&回転

質点の運動	剛体の回転運動 (2次元)	剛体の回転運動 (3次元)
$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{P}}$	$N = \dot{L} = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta}$	$N = \dot{L}$
$\mathbf{P} \equiv m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$ (定義)	$L \equiv I\omega = I\dot{\theta}$ (定義)	$\mathbf{L} \equiv \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ (定義)
		$N \equiv \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f}$ (定義)
$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} ^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v} ^2$	$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$	$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{L}$

剛体の回転運動の方程式

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$$

絶対座標系

$$\mathbf{N}' = \boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{L}' + \dot{\mathbf{L}}'$$

回転運動座標系

座標変換

ベクトル:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}$$

テンソル:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}' \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}$$

良く使うテンソルやベクトルの演算

・テンソル積の転置: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, ...

・内積とテンソル積: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ (左辺: 内積, 右辺: テンソル積)