工業力学第二 第７回講義の要点　　伊能

・例題5.16と例題5.19を理解し、類似問題を解けるレベルにすること。

慣性テンソル（再掲：導出過程も確認しておくこと）

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

慣性モーメント

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2)dm\,, \qquad I_y = \int_V (x^2 + z^2)dm\,, \qquad I_z = \int_V (x^2 + y^2)dm$$

慣性乗積

$$I_{xy} = \int_V xydm\,, \qquad I_{yz} = \int_V yzdm\,, \qquad I_{xz} = \int_V xzdm$$

次の**慣性乗積に関する式**は、使えるようにしておくこと。

$$I'_{xy} = I_{xy} + Mx_g y_g$$

慣性テンソル$\boldsymbol{I}$を$O-xyz$座標系から$O-\xi\eta\zeta$座標系へ座標変換する公式も重要である。

$$I' = P \cdot I \cdot P^T$$

対象物が平面形状でｚ軸まわりに回転させる場合の座標変換テンソルPは、式(5.106)であることも確認する。

慣性主軸と主慣性モーメントの求め方

注意：222 頁から 230 頁まで行列および行列式を構成する成分の添え字が x, y, z でなく、1, 2, 3 になっている。使用する座標系に対応させて理解すること。

ステップ１：次の式より３次方程式を解いて根$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$を求める。

$$\det(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

対象物がxy平面内で板状の剛体の場合、λ_3は式変形すれば自明であることがわかる。つまり、実質的に二次方程式の計算である。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$が主慣性モーメントとなる。

ステップ２：λ_1，λ_2，λ_3に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$，$\boldsymbol{\omega}_3$は以下の式から求める。

$$(I - \lambda_1 E) \cdot \omega_1 = 0\,, \qquad (I - \lambda_2 E) \cdot \omega_2 = 0\,, \qquad (I - \lambda_3 E) \cdot \omega_3 = 0$$

それぞれの式から一個ずつ固有ベクトルが求まる。教科書では、できるだけ簡単な数値を選んで固有ベクトルを表している。

それぞれの固有ベクトルは主軸方向を示している。これより主軸の角度も求められる。

慣性乗積の意味

ある軸まわりの慣性乗積を計算して値が 0 にならない場合、対象物をその軸まわりで回転させると、回転支持部に回転軸以外の方向に周期的なトルクが発生する。これが機械の振動や騒音の原因になる。

図 5.36 は慣性乗積が 0 にならない例である。図 5.35 では x 軸および y 軸に対して対称形であるが、図 5.36 ではどちらの軸に対しても非対称形となるので式（5.100）の計算のように I_{xy} は 0 にはならない。この対象物を x 軸まわりに回転させたときの角運動量は、式（5.102）のように計算できる。角運動量は L_y 成分が 0 になっていない。このことは x 軸まわりだけでなく y 軸まわりにも力（トルク）が発生することを意味する。この角運動量 L_y は、x 軸の回転とともに y 軸も回転するので発生する向きが変化する。(xy 座標は板材に固定されているため。)

このことを直感的に理解するために図 1 のような回転体を x 軸まわりに回転させた時の状況を考えよう。回転体は原点Oから等距離で軸受け A, B に支えられている。回転とともに軸受け部には周期的なトルクが発生する。軸受け側からみると、軸受け A, B には反力が常に逆向きに働き、板材の回転とともに力の向きが変化する。この力学状態をイメージしてみよう。

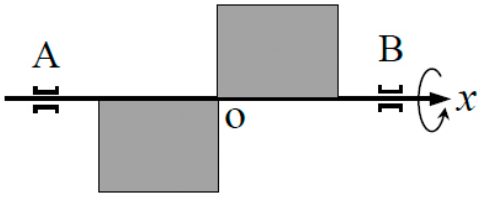

図 1

回転体が x, y 軸のいずれかで対称となる形では、定義式から慣性乗積は 0 となる。図 2 は、y 軸に対して対称となる回転体の場合である。回転体の重心と軸受けとの距離は異なるが、重力が働かなければ軸受け A, B には反力は生じない。図 3 では、回転によって軸受け A, B に反力は発生するが、力の大きさと向きは変化しないので軸受けにトルクは生じない。

図 5.37 の対象物も x 軸、 y 軸のいずれの回転でも、軸受け部に周期的なトルクが発生する。ここで、上記の方法で慣性主軸（固有ベクトルの方向）を求めてやると、その軸まわりでは軸受け部に周期的なトルクが発生しなくなる。このことは図 1 の回転体にも適用できる。

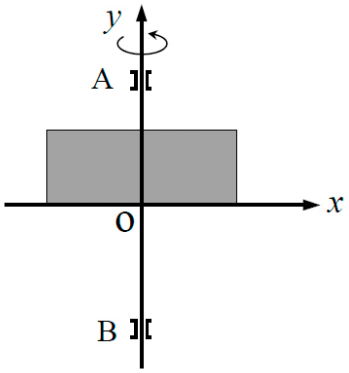

図 2

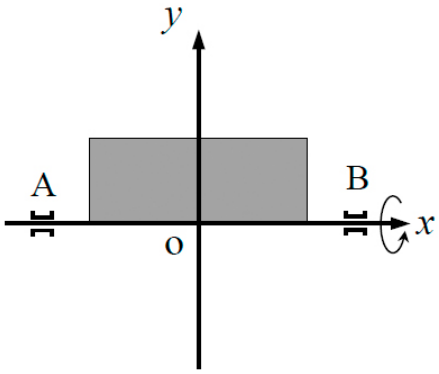

図 3

（2012. 11. 30 改訂）平成 24 年度版掲載