**第４回演習問題および出席点の問題の訂正と解説**　　伊能　　2012. 11. 21

（11/21 の講義で配付。赤字は追加の修正箇所）

**第４回演習問題　問題１（訂正版）**

図(a)に示すように頂角 60°の円錐が水平な床の上を一定の速さですべらずに転がり，Z 軸まわりに毎秒１回転している．円錐の母線の長さを $r_0$ とする．次の問に答えよ．

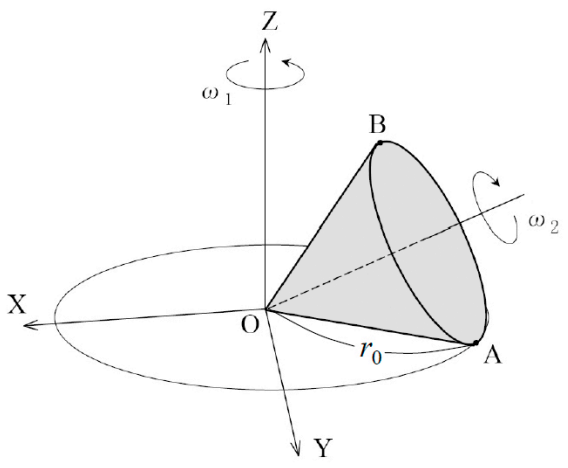
1.1　Z 軸まわりの角速度の大きさ $\omega_1$ と円錐の回転角速度の大きさ $\omega_2$ の値を求めよ．（10 点）

1.2 図(b)に示すように円錐と一緒に回転する運動座標系 O′-$\xi\eta\zeta$を設定する．角速度 $\omega_1$ と $\omega_2$ に対応する運動座標系で表した角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_1'$, $\boldsymbol{\omega}_2'$ を基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を使って表せ．（20 点）（注：図(b)は，ある時刻での瞬間的な運動座標系 O′-$\xi\eta\zeta$の配置を示している．O′は静止座標系の基準点 O と一致している．$\xi$軸は円錐の中心軸に一致しており，円錐に固定されている．つまり $\eta$ 軸と $\zeta$ 軸は，$\xi$軸まわりに回転する．）

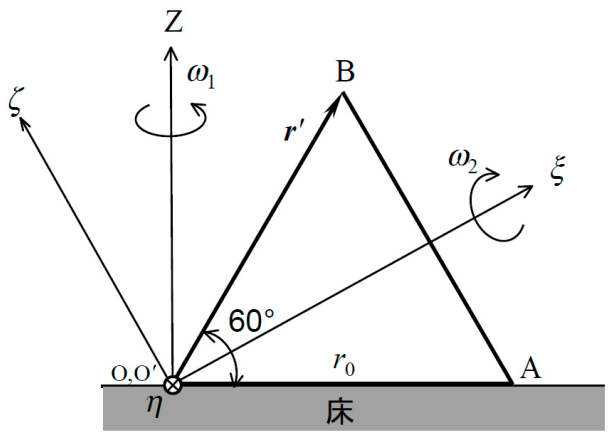
1.3　運動座標系で表した角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu}'$を基底ベクトルを使って表せ．（5 点）

1.4　円錐の最高点 B の速さを $r_0, \omega_1, \omega_2$ で表わせ．（10 点）

1.5　$r_0$=150mm のとき，1.4 で求めた速さを有効数字二桁で答えよ．（5 点）




図(a)




図(b)

**解説**：11/16 日の演習の冒頭で私が説明した運動座標系の設定では「剛体運動」の問題になりません。問題を上記のように訂正（特に下線部）し、以下の説明に改めます。

この問題では，円錐と$\xi$軸は「固定している」と考えます。$\xi$軸は円錐と固定されているので、$\eta$ 軸と $\zeta$ 軸も$\xi$軸のまわりに回転します（直交座標系なので）。図(b)では$\eta$ 軸が床に接していますが、次の瞬間には床面とは異なる向きになります．このように運動座標系が剛体と「固定して」動くことにより，式(5.4)において第一項が 0 になり式（5.5）となります。さらに O と O′が一致しているので式(5.6）が適用できます。

角速度ベクトルは、$\xi$軸まわりに $-\omega_2\boldsymbol{e}_1$ である。また z 軸まわりの角速度は、図(b)の瞬間的な配置から求めることができ、$\xi$軸と$\zeta$軸方向に分解して、$\omega_1 \sin\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_1 + \omega_1 \cos\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_3$ である。

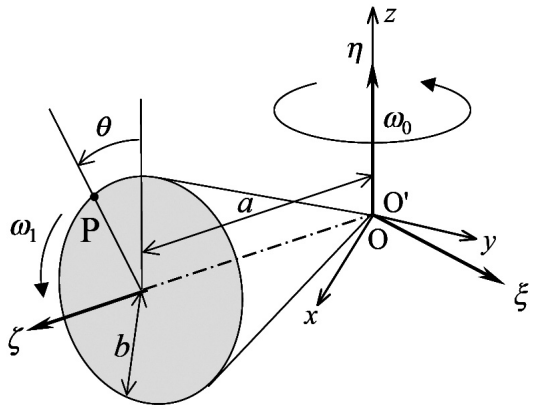
これら二つの角速度ベクトルの和が運動座標系で表した剛体の角速度ベクトル $\boldsymbol{\mu}'$になる。

追加訂正：11 月 9 日の講義で出題した出席点問１の問題も「剛体運動」の設定になっていないので，以下のように問題文と図を訂正し、解説を加えます.

**出席点　問１（訂正版）**

図のように円錐は、動座標系O′-$\xi\eta\zeta$の$\zeta$軸まわりに角速度の大きさ$\omega_1$で回転している。同時に円錐は静止座標系O-xyzのz軸まわりにも角速度の大きさ$\omega_0$で回転している。円錐の底の縁の点Pにおける速度を求めたい。点Pは$\eta$軸がz軸に一致した時に反時計まわりの方向に角度$\theta$であったとする。点Pでの運動座標系で表した速度ベクトルは次式で表せることを示せ。ただし$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ は運動座標系O′-$\xi\eta\zeta$の基底ベクトルである。（第３回演習問題で出題した質点の運動の速度ベクトルと同じになることを確認してほしい。）

$$\boldsymbol{v}' = (a\omega_0 - b\omega_1\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 - b\omega_1\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + b\omega_0\sin\theta\boldsymbol{e}_3$$




**解説：**

O′から点Pまでの位置ベクトル$\boldsymbol{r}'$は

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{e}_3 - b\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + b\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

と表せる。

角速度ベクトルについては、

$\zeta$軸まわりの角速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega}_1' = \{0, 0, \omega_1\}^T = \omega_1\boldsymbol{e}_3$$

となる。またz軸まわりの回転は、$\eta$軸がこの瞬間でz軸と一致していることから

$\eta$軸まわりの角速度ベクトルとして

$$\boldsymbol{\omega}_0' = \{0, \omega_0, 0\}^T = \omega_0\boldsymbol{e}_2$$

と表せる。運動座標系で表した円錐の角速度ベクトル$\boldsymbol{\mu}'$は上記二つのベクトル和で表すことができ

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\omega}_0' + \boldsymbol{\omega}_1' = \omega_0\boldsymbol{e}_2 + \omega_1\boldsymbol{e}_3$$

となる。したがって点Pでの速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{r}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & \omega_0 & \omega_1 \\ -b\sin\theta & b\cos\theta & a \end{vmatrix}$$

$$= (a\omega_0 - b\omega_1\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 - b\omega_1\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + b\omega_0\sin\theta\boldsymbol{e}_3$$

となり、第３回演習問題の質点の速度ベクトルと一致することが確認できる。