工業力学第二　第２回講義要点　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**伊能**

◎第１回演習問題を確認する。

前回に引き続き**運動座標系**で物体の運動（速度、加速度）を表現する方法を学ぶ。この表現式を理解するポイントは、第１回の繰り返しになるが視点を運動座標系に置くことである。つまり、**静止座標系**から見た**絶対運動**でなく**運動座標系**を基準にして議論する。こうすることにより着目する対象物の運動を単純化して考えることができる。

並進運動座標系における速度と加速度（再掲載）

対応する図は、図 4.31。式（4.223）を導出するための式（4.220）、（4.221）、（4.222）も確認しておこう。

式（4.223）の意味

$\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\dfrac{d^{*}\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}}'$ （OCW 掲載の「教科書修正その２」参照）

・左辺は運動座標系の表示で絶対速度を表す記号

・右辺第１項は、運動座標系でみたときの点Ｐの速度

（*印は運動座標系を基準にしているという意味。位置を運動座標系を基準にして微分しているので**相対速度**となる。図 4.31 では電車内でボールが点 P として描かれているが、この*印が付いているので、電車内の座標、つまり運動座標系を基準にしたボールの速度となる。）

・右辺第２項は、運動座標系の速度。つまり、静止座標系の原点Oに対する運動座標系の原点O’の速度で**運搬速度**とよばれる。図 4.31 では電車の走行速度に等しい。ただし、速度成分を静止座標系ではなく運動座標系で表している。）

並進運動座標系における加速度（再掲載）

対応する図は、図 4.31 と式（4.224）である。式（4.223）を時間 t で微分すれば求まる。

$\dfrac{d^{2}\boldsymbol{r}'}{dt^{2}}=\dfrac{d^{*2}\boldsymbol{r}'}{dt^{2}}+\dot{\boldsymbol{v}}_{0}'$ （OCW 掲載の「教科書修正その２」参照）

・左辺は運動座標系の表示で絶対加速度を表す記号

・右辺第１項は、運動座標系でみたときの点Ｐの加速度

（*印は運動座標系を基準にしているという意味。位置を運動座標系で２回微分しているので**相対加速度**となる。図 4.31 では電車内のボールの加速度を示している。）

・右辺第２項は、運動座標系の加速度

（**運搬加速度**と呼ばれる。つまり電車の加速度に等しい。ただし、加速度成分は静止座標系ではなく運動座標系で表す。）

まとめ：並進運動は、以下のように二つにわけて表せる。これは図 4.31 で電車本体の運動（運搬速度）と電車内の運動（相対速度）に分けて考えていることに相当する。

絶対速度　=運搬速度+相対速度　　（式（4.223）の右辺の項の順序を逆にすれば対応する。）

絶対加速度=運搬加速度+相対加速度（式（4.224）の右辺の項の順序を逆にすれば対応する。）

回転運動座標系における速度

　ここまでの表現は、運動座標系が静止座標系に対して並進運動を行っている場合であった。つぎに、運動座標系が静止座標系に対して回転運動を伴っている場合について解説する。

　運動座標系における速度表現も「**絶対速度=運搬速度+相対速度**」の関係が成立する。対応する図は、図 4.34 であるが、状況を単純化して二次元の回転運動で考えた方がわかりやすい。つまり図 4.31 の設定で列車が直線走行しているのではなく、下図に示すように円弧状のレール上を列車が走行していると考える。こう考えることで運動座標系が静止座標系に対して回転運動をしている状況になる。

　静止座標系と運動座標系の原点が一致している場合の回転運動を伴う速度表現は、式（4.232）である。これは式（4.223）に対応する式であるが、右辺の項の順序が違うので注意すること。

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' + \frac{d^*\boldsymbol{r}'}{dt}$$

・左辺は運動座標系の表示で点 P の絶対速度を表す記号

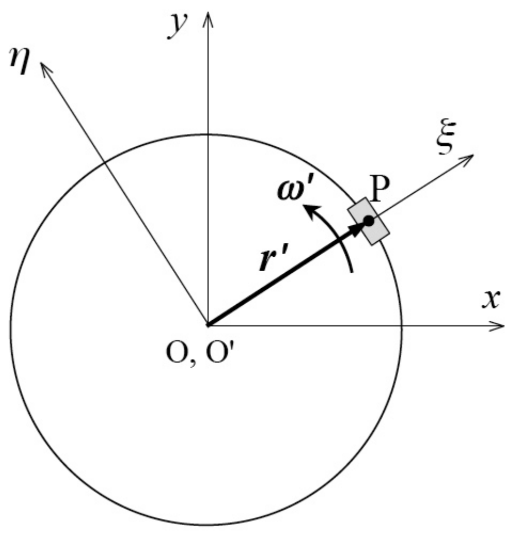
・右辺第 1 項は、回転運動の際の運搬速度

（電車が円弧状に運動しているときの速度を意味する。ただし、この速度は運動座標系の表示で表わされており、原点からの位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}'$ の外積で求まる。並進運動時の運搬速度では、$\boldsymbol{v}_0'$ と記述されていることを確認しよう。もし、運動座標系が静止座標系に対して回転運動と並進運動が入り混じった状態ならば、二つの速度ベクトルの和で表現される。）

・右辺第 2 項は、運動座標系でみたときの点 P の速度であり、式（4.223）の第 1 項に対応

（*印が付いているので、運動座標系を基準にしている相対速度。つまり、電車内の観察者がみているボールの速度である。）

まとめ：回転を伴う運動でも、「**絶対速度=運搬速度+相対速度**」の関係で表せる。円弧状に走行する電車本体の運動（運搬速度）と電車内の運動（相対速度）に分けて考えていることに相当する。



二次元の回転運動

O'-$\xi\eta$系は電車と一緒に動く運動座標。

回転運動座標系における加速度

静止座標系と運動座標系の原点が一致しているとき、式(4.237)で表せる。この式は図4.34に対応している。式の導出の仕方は次回講義で解説する。

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r}')+2\boldsymbol{\omega}'\times\frac{d^*\boldsymbol{r}'}{dt}+\frac{d^{*2}\boldsymbol{r}'}{dt^2} \tag{4.237}$$

・左辺第１項：運動座標系で表した点Pの絶対加速度を示す記号

・右辺第１項：回転の加減速によって生じる加速度を運動座標系で表したもの

（一定の角速度で運動している場合は、０となる。）

・右辺第２項：運動座標系で表した向心加速度

（回転中心との距離を保つためには中心方向に常に加速度が必要。質点の運動では、中心から遠ざかる方向に遠心力が働く。）

・右辺第３項：コリオリの加速度

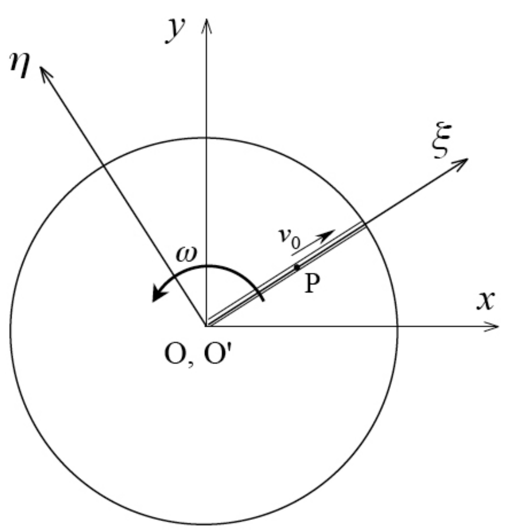
（運動座標系でみられる見かけ上の加速度。回転運動の角速度と運動座標系を基準にした速度が関係する。この意味については次回解説。）

・右辺第４項：相対加速度

（運動座標系を基準にした加速度。式(4.224)の右辺第１項と同じ。）

回転運動の加速度は速度の式に比べて複雑であるので、最初は二次元の設定で考えた方がわかりやすいと思う。ここでは下図に示すように回転する円板に溝が切ってあり、その中を点Pが速度v_0で運動している状況を考え、式の対応関係を確認してみる。

右辺第１項は円板が加減速する時に生じる角速度変化によって生じる加速度である。第２項は円板上で生じる加速度である。これは円運動で生じる加速度と同じである。右辺第３項と第４項は、質点が円板上を動くことで生じる加速度である。第４項は質点の速度v_0が一定なら0となる。



回転円板上での運動

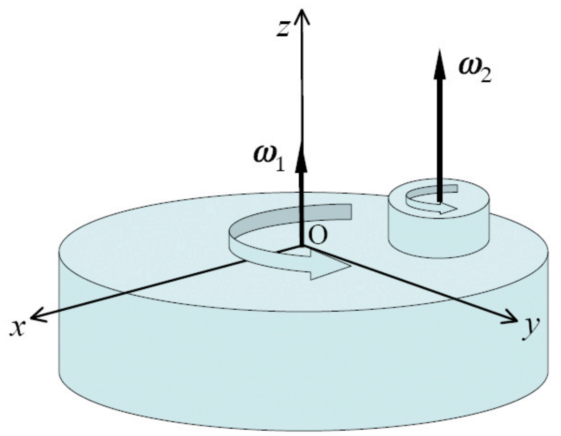
例題 4.15 を確認のこと。

点 P は静止座標系からみると動いているが動座標系上に固定されている。つまり、相対速度はゼロなので式（4.233）が適用できる。（もちろん並進運動も含まれていない。）

角速度ベクトル

三次元空間で角速度を表すには角速度ベクトルを用いる。下図のように大きな回転テーブルの上に小さな回転テーブルが回っている状況を考える（遊園地のコーヒーカップを思い浮かべると理解しやすい）。大きな回転テーブルの角速度の大きさを ω_1とすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_1$は $\{0, 0, \omega_1\}^T$ と表すことができる。小さな回転テーブルの角速度の大きさを ω_2 とすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_2$ も同様に$\{0, 0, \omega_2\}^T$ と表すことができる。小さな回転テーブル上では、角速度ベクトルの和となることはすぐに理解できるだろう。つまり、$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ が成立している。コーヒーカップを逆方向に回転させた経験があるなら、回転成分を相殺できる、つまり引き算もできることもすぐにわかるだろう。この場合、コーヒーカップの中心は大きな回転テーブルの中心にないので視点の位置が変化することに気づいた人もいると思う。しかし、この動きは回転成分ではないので、角速度ベクトルの足し算、引き算は成立している。

他のベクトルと同様に角速度ベクトルは、ベクトルの方向が異なっていても加減算が成立する。たとえば $\boldsymbol{\omega}_1=\{\omega_1, 0, 0\}^T$、$\boldsymbol{\omega}_2=\{0, \omega_2, 0\}^T$ の場合でも $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ は成立する。これを直感的に理解する説明を講義で紹介する。



（2012. 9. 26 改訂）

（2012. 10. 18 改訂）