工業力学第二　第１回講義要点　　伊能

工業力学第二では、**運動座標系**で物体の運動（速度、加速度）を表現する方法を理解することが重要である。この表現方法を理解するポイントは、視点を運動座標系に置くことである。つまり、観察者は**静止座標系**から見た**絶対運動**でなく運動座標系をベースにした**相対運動**に着目して運動を表現する。こうすることにより運動を単純化して考えることができる。

教科書の図 4.31 では、走行する列車の中で子供がボールを投げている。列車内（運動座標系 O'-ξηζ）ではボールの速度は運動座標系でみた速度 $\boldsymbol{v}'$となっている。一方、静止座標系 O-xyz からみれば列車の速度が上乗せされて観察される。この程度ではあまり恩恵がなさそうであるが、たとえば列車内でボールが円運動しているとする。静止座標系からボールの動きをみると、かなり複雑な軌道になるが列車内（運動座標系）ならば円運動として扱える。この設定で運動中のボールにどのような力が働くのか？これが求められるようになるための準備を第１回講義では行う。

並進運動座標系における速度

対応する図は、図 4.31 である。式（4.223）を導出するための式（4.220）、(4.221)、(4.222) も確認しておこう。これらの式を理解するには、後述する座標変換の知識が必要である。

ここでは式（4.223）の意味について説明する。

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{d^{*}\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}}{}'$$ （OCW 掲載の「教科書修正その２」参照）

・左辺は運動座標系の表示で絶対速度を表す記号

・右辺第１項は、運動座標系でみたときの点 P の速度

微分記号右肩の*印は、運動座標系を基準にしているという意味。運動座標系を基準にして位置を微分しているので**相対速度**となる。図 4.31 では電車内を基準にしたボール P の速度に相当する。つまり、電車内の座標（運動座標系）を基準にした速度となる。

・右辺第２項は、運動座標系の速度。つまり、静止座標系の原点Ｏに対する速度である。ダッシュ（′）が付いていることから運動座標系の原点Ｏ’の速度で**運搬速度**とよばれる。

ここで式（4.223）と対応させて図 4.31 をみる場合、少し注意が必要である。図中のボールの速度は $\boldsymbol{v}$ となっているが電車内からみたボールの速度、すなわち運動座標系で表現するならば $\frac{d^{*}\boldsymbol{r}'}{dt}$ とすべきである。また電車の速度も静止座標系ではなく運動座標系で表すべきなので、電車上部の文字と記号は、次のように変えた方がマッチする。

運動座標系の運動（運搬速度）$\Rightarrow \boldsymbol{v}_0'$

なお、図 4.31 では一次元的な動きとして描いているが、運動座標系の向きは自由に設定できる。

並進運動座標系における加速度

対応する図と式は、図 4.31 と式（4.224）である。式（4.223）を時間 t で微分すれば求まる。

$$\frac{d^{2}\boldsymbol{r}'}{dt^{2}}=\frac{d^{*2}\boldsymbol{r}'}{dt^{2}}+\dot{\boldsymbol{v}}_{0}'$$ （OCW 掲載の「教科書修正その２」参照）

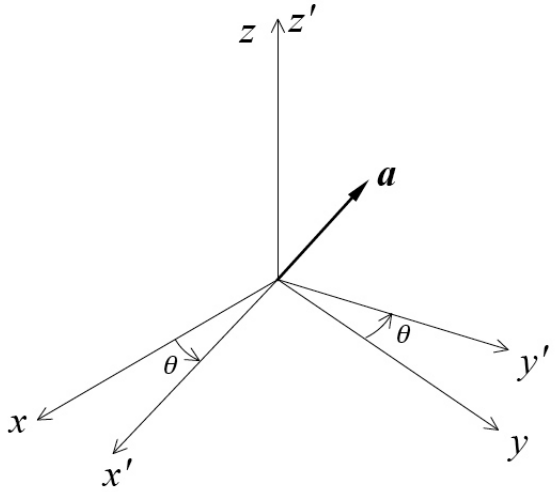
・左辺は運動座標系の表示で絶対加速度を表す記号

・右辺第１項は、運動座標系でみたときの点Ｐの加速度
（*印は運動座標系を基準にしているという意味。位置を運動座標系で２回微分しているので**相対加速度**となる。図 4.31 では電車内のボールの加速度を示している。）
・右辺第２項は、運動座標系の加速度
（**運搬加速度**と呼ばれる。つまり電車の加速度に等しい。ただし、加速度成分は静止座標系ではなく運動座標系で表す。）
次に、式（4.220）、(4.221)、(4.222）を理解するための座標変換と角速度ベクトルについて説明する。

座標変換

座標変換は、注目する対象物の運動を動座標系で表示するのに必要となる。工業力学で必要な座標変換は、対象物は動かさずに座標系を変更したときに物体の位置を求めることに用いられる。
簡単な例として、座標系 O-xyz を基準として z 軸まわりに角度 θ 回転させた座標系 O'- x'y'z'を考える。この座標変換テンソル $\boldsymbol{P}_z$ は幾何学的な関係から高校の数学で簡単に求まるが、38 頁の（2.65'）式を用いれば機械的に求まる。
たとえば θ_{11} は x'座標と x 座標のなす角度なので $\cos\theta$ となり、θ_{31} は z'座標と x 座標のなす角度なので $\theta_{31}=\pi/2$，つまり $\cos\theta_{31}=0$ となる。すべての成分を求めると座標変換テンソル $\boldsymbol{P}_z$ は以下のように表せる。

$$\boldsymbol{P}_z=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



新しい座標系でのベクトル $\boldsymbol{a}'$は
$\boldsymbol{P}_z$ を用いて以下のように求まる。

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{a}$$

この座標変換は、上述した運動座標系と静止座標系の変換に用いられている。教科書では、運動座標系から静止座標系への座標変換テンソルを $\boldsymbol{R}$ としている。このため、(4.220)の右辺第１項は、運動座標系で表記されたベクトル $\boldsymbol{r}'$ が $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}'$ で静止座標系に変換されていると解釈できる。さらに静止座標系から運動座標系の変換は、転置記号を使って変換テンソル $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ として表せる。つまり、39 頁(2.66)式から $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{-1}$ の関係がある。式(4.222)では、変換テンソル $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ を施して式(4.221)の静止座標系で表された式を運動座標系を基準にした式に変換している。

参考：テンソルと行列

テンソルは、線形関係で表せる物理量あるいは幾何学的な関係を配列として表現したものである。テンソルは「階数」によって分類される。
１階のテンソル：力、角速度などのベクトル量で教科書では $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}^{\mathrm{T}}$ と表している。
２階のテンソル：座標変換、応力テンソル、歪テンソルなどの線形関係が成立する量で三次元で

は３行３列の行列（成分 a_{ij}）で表現され、工学では特に重要である。（応力テンソル、歪テンソルは二年次以降の専門科目で学習する。）したがってテンソル=行列ではなく、**２階のテンソルが行列を使って表現できる**という関係になっている。３階、４階のテンソルも考えられるが通常の二次元的な行列では表現できない。ちなみに０階テンソルはスカラー量に対応する。

（2012.9.26 改訂）平成 24 年度版掲載

（2012.10.3 改訂）$\boldsymbol{P}_x \rightarrow \boldsymbol{P}_z$（z 軸まわりに回転する座標変換テンソルなので）