5.2.2　2次錐として書ける不等式制約

話を少し抽象化して，$g(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + p$とすると，$g(x) \leq 0$を満たす$x$の集合は2次錐制約で書けることになる．

その他の例:

- 恒等式 $g(x) = \alpha - x$
- 線形不等式 $g(x) = q^T x + p$
- Euclideanノルム $g(x,t) = \|x\|_2 - t$
- Euclideanノルムの2乗 $g(x,t) = x^T x - t$
- 凸2次関数 $g(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + p$，ただし $Q \succeq O$
- 2次分数関数 $g(x,s,t) = \begin{cases} \frac{x^T x}{s} - t, & s > 0 \\ 0, & s = 0,\ x = 0 \\ +\infty & \text{それ以外} \end{cases}$
- 双曲線の片側 $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq ts,\ t > 0\}$

5.2.3　2次錐表現を保つ変換

- 2次錐集合の積
- 2次錐集合の直積
- 2次錐集合のアフィン変換

5.2.4　2次錐として書ける関数の変換

- 関数の最大値
- 非負重み付き和
- 定義域をアフィン変換で代入

5.2.5　2次錐として書ける集合

- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \ t \leq \sqrt{x_1 x_2}, \ x \geq 0, \ t \geq 0\}$
- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \ t \leq \sqrt{x_1 x_2}, \ x \geq 0\}$
- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2^n} : \ t \leq (x_1 x_2 \cdots x_{2^n})^{1/2^n}, \ x \geq 0\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^p \leq y^q, \ x \geq 0, \ p,q$ 正整数, $p \geq q\}$

- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^{p/q} \leq t, \ x \geq 0, \ p,q$ 正整数, $p \geq q\}$
- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^{p} \leq t, \ x \geq 0, \ p$ 正整数$\}$
- $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} = \|x\|_p \leq t, \ p$ 正整数$\}$

その他の例は [BEN-TAL2001] などに詳しく書かれている.

5.2.6 2次錐計画問題

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{最小化：} & c^T x \\ \text{条件：} & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K}^n \end{array} \right. \tag{5.2}$$

<u>2次錐</u>

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^n &= \left\{ (x_0; z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2} \leq x_0 \right\} \\ &= \left\{ (x_0; z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : \ \|z\|_2 \leq x_0 \right\} \end{aligned}$$

- 線形計画問題は 2 次錐計画問題の特殊ケース

5.2.7 応用例：ロバスト 最適化

- 次の線形計画問題を考える

$$\boxed{\begin{cases} \text{最小化：} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{条件：} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad (5.3)}$$

- 応用問題ではデータ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ に不確実性がかなりある
- 制約条件を $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} - b_j \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$ とする

矩形な不確実性

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{c}^* - \bar{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}^* + \bar{\boldsymbol{c}}] \\ &\boldsymbol{a}_j \in [\boldsymbol{a}_j^* - \bar{\boldsymbol{a}}_j, \boldsymbol{a}_j^* + \bar{\boldsymbol{a}}_j],\ \ j = 1, 2, \ldots, m \\ &\boldsymbol{b}_j \in [\boldsymbol{b}_j^* - \bar{\boldsymbol{b}}_j, \boldsymbol{b}_j^* + \bar{\boldsymbol{b}}_j], \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

となっていて，$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{U}$ とする．

この場合不確実性データを持った線形計画問題 (5.3) の最適値は以下のようにして考えられる：

$$
\begin{cases}
\text{最小化：} & \boldsymbol{t} \\
\text{条件：} & \boldsymbol{c^T x \le t} \\
 & \boldsymbol{Ax - b \le 0} \\
 & \boldsymbol{(c, A, b) \in \mathcal{U}}
\end{cases}
$$

- 各制約式について見てみると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c^T x - t \le 0,\ c \in [c^* - \bar{c}, c^* + \bar{c}]} \ &\Rightarrow\ \boldsymbol{(c^*)^T x + (\bar{c})^T |x| - t \le 0} \\
&\Rightarrow\ \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{(c^*)^T x + \bar{c}^T y - t \le 0} & \\ \boldsymbol{-y_i \le x_i \le y_i,} & \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_j^T x - b_j \le 0,}\ \begin{array}{l} \boldsymbol{a_j \in [a_j^* - \bar{a}_j, a_j^* + \bar{a}_j]} \\ \boldsymbol{b_j \in [b_j^* - \bar{b}_j, b_j^* + \bar{b}_j]} \end{array} \ &\Rightarrow\ \boldsymbol{(a_j^*)^T x + (\bar{a}_j)^T |x| - b_j^* + \bar{b}_j \le 0} \\
&\Rightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{(a_j^*)^T x + \bar{a}_j{}^T y - b_j^* + \bar{b}_j \le 0} \\ \boldsymbol{-y_i \le x_i \le y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

- 矩形な不確実性をもったデータに関しては次の線形計画問題が得られる

$$\begin{cases} \text{最小化：} & t \\ \text{条件：} & (c^*)^T x + \bar{c}^T y - t \le 0 \\ & (a_j^*)^T x + \bar{a_j}^T y - b_j^* + \bar{b_j} \le 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m \\ & -y_i \le x_i \le y_i, \ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

楕円形な不確実性

$$c \in \{c^* + Cu : \ C \succeq O, \ \|u\|_2 \le 1\}$$

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a_j^* \\ b_j^* \end{pmatrix} + A_j \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \ A_j \succeq O, \ \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_2 \le 1 \right\}, \ j = 1, 2, \ldots, m$$

となっていて，$(c, A, b) \in \mathcal{U}$ とする．

この場合不確実性データを持った線形計画問題 (5.3) の最適値は以下のようにして考えられる：

$$\begin{cases} \text{最小化：} & t \\ \text{条件：} & c^T x \le t \\ & Ax - b \le 0 \\ & (c, A, b) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

- 各制約式について見てみると

$$
\begin{aligned}
& c^T x - t \le 0,\ c \in \{c^* + Cu :\ C \succeq O,\ \|u\|_2 \le 1\} \\
& \Rightarrow (c^*)^T x + \max_{\|u\|_2 \le 1} u^T C x - t \le 0 \\
& \Rightarrow (c^*)^T x + \|Cx\|_2 - t \le 0
\end{aligned}
$$

$$
a_j^T x - b_j \le 0,\ \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a_j^* \\ b_j^* \end{pmatrix} + A_j \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} :\ A_j \succeq O,\ \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_2 \le 1 \right\}
$$

$$
\Rightarrow (a_j^*)^T x - b_j^* + \max_{\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_2 \le 1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T A_j^T \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \le 0
$$

$$
\Rightarrow (a_j^*)^T x - b_j^* + \left\| A_j^T \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \le 0
$$

- 楕円形な不確実性をもったデータに関しては次の2次錐計画問題が得られる

$$
\begin{cases}
\text{最小化：} & t \\
\text{条件：} & \|Cx\|_2 \le t - (c^*)^T x \\
& \left\| A_j^T \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \le b_j^* - (a_j^*)^T x
\end{cases}
$$

5.3 半正定値計画問題 (Semidefinite Programming, SDP)

半正定値行列錐

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+^n &= \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ X \succeq O\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ X \text{ 対称}, \ \lambda_i(X) \geq 0\} \end{aligned}$$

ただし，$\lambda_i(X)$ は対称行列 X の i 番目の固有値であり，$\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X)$ とする．

半正定値計画問題

$$\begin{cases} \text{最小化：} & \langle C, X\rangle \\ \text{条件：} & \langle A_i, X\rangle = b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & X \succeq O \qquad\quad (\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}_+^n) \end{cases}$$

ただし，$\langle C, X\rangle = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} C_{pq}X_{pq}$ とする．

定義3

ある集合$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^\ell$が半正定値行列錐制約で書き表わせるとは$\mathbb{R}^\ell$から$\mathbb{R}^{n\times n}$へのアフィン写像が存在し，その値域が半正定値行列錐に入っている時をいう．

つまり，線形作用素$\mathcal{A}$と行列$B \in \mathbb{R}^{n^2}$が存在し，

$$y \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^\ell \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}y + B = X \in \mathcal{S}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$$

となる時である．

この場合，集合$\mathcal{C}$は凸集合である．

命題4

$$A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{(n+\ell)\times(n+\ell)}$$

を対称行列とし，Dは正定値行列だとする．すると

$$A \succeq O \Leftrightarrow B - C^T D^{-1} C \succeq O$$

が成り立つ．

証明

$\boldsymbol{A}$が半正定値行列であるとは

$$\boldsymbol{0} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\ell$$

と同値である．さらに，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$を固定するとこのことは以下のことと同値である．

$$\boldsymbol{0} \leq \begin{cases} \text{最小化：} & \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \\ \text{条件：} & \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\ell \end{cases}$$

この最適化問題の最適性条件を考え，$\boldsymbol{D}$が正定値行列であることから

$$\boldsymbol{y}^* = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

となり，最適値は

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}$$

となる．上記は任意の$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$に対して非負でなければならないので，命題が証明されたことになる． □

5.3.1 半正定値行列錐として書ける集合

- 1次制約で書ける全ての集合
- 2次錐制約で書ける全ての集合
- 実数対称行列の最大固有値 $\{(X,\lambda) \in \mathcal{S}^n \times \mathbb{R} : \ \lambda_1(X) \leq \lambda\}$

$$\lambda I - X \succeq O$$

- 実数対称行列のスペクトルノルム $\{(X,\lambda) \in \mathcal{S}^n \times \mathbb{R} : \ \|X\|_{\mathrm{spec}} \leq \lambda\}$

$$\lambda I - X \succeq O, \ \lambda I + X \succeq O$$

- 実数対称行列の1番目から k 番目に大きい固有値の和

$$\{(X,\lambda) \in \mathcal{S}^n \times \mathbb{R} : \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(X) \leq \lambda, \ k \leq n\}$$

$$\begin{aligned} \lambda - ks - \langle Z, I \rangle &\geq 0 \\ Z &\succeq O \\ Z - X + sI &\succeq O \end{aligned}$$