



基礎物理学B演習 4類b組 第6回問題

【1】《ベクトル解析, Levi-Civita 記号》

(i) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を証明せよ.

(ii) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ を示せ.

(iii) 以下の $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ の証明には間違いがある. どこが間違っているか, 指摘せよ. (試験の際, 多くの人が間違える典型例です.)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i = \epsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \\ &= \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_j B_i C_j - A_j B_j C_i = A_j C_j B_i - A_j B_j C_i \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_i - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_i = ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C})_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}.\end{aligned}$$

【2】《Biot-Savart の法則, Ampère の法則》

長さ l の線分状の導線に流れる電流 I が作る磁束密度について考察しよう. この導線の中点を原点とし, 導線が z 軸と重なるようにデカルト座標を取る. 電流の向きは z 軸の正の向きとする. 電荷の保存則を満足させるためには, 時間が経つにつれて導線の両端に電荷が溜まっていくと考えればよい. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 簡単のため xy 平面内に話を限定する. Biot-Savart の法則を用いて磁束密度を計算しなさい.

ヒント: デカルト直交座標でなく, 円柱座標系を用いた方が楽である.

(ii) 次に Ampère の法則を用いて xy 平面内の磁束密度を求めよ. そして, その結果が (i) とは一般に異なることを確認しなさい.

(iii) Biot-Savart の法則と Ampère の法則とで異なる結果が得られた理由について考察をしよう. 実は, Ampère の法則は一般には成り立たない. これを示せ. また, どのような条件の下ならば Ampère の法則が成立するか述べよ.

ヒント: Ampère の法則の微分形 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ の両辺について, それぞれ発散を計算してみよ.

【3】《Helmholtz コイル》

同一の中心軸を持つ半径 a の 2 つの円形コイルが, b の間隔で置かれている. それぞれのコイルに, 同方向で等しい電流 I を流した. 中心軸を x 軸, 2 つのコイルの中点を原点としよう.

(i) まず, 円形コイルが 1 つだけある場合について中心軸上の磁束密度を計算せよ. (座標系は適当に定めること.) そして, その結果を利用して問題文にあるような 2 つの円形コイルが x 軸上の点 $P(x, 0, 0)$ に作る磁束密度の大きさ $B(x)$ を求めよ.

(ii) 原点付近でなるべく磁束密度の場所変化 (x 軸に沿った変化) が起こらないようにしたい. どのようにすればよいか.

(※) 変化させるべきなのはどのような量なのか, よく考えること. a も b も 10 倍大きくすれば, 例えば磁場が 1% 変化する距離は 10 倍になる. だから, 「全体をいくらでも大きくすればよい」 のような解答は全然ダメである!

ヒント: 原点付近 $x \simeq 0$ での関数の振る舞いを知りたいなら, その関数を $x = 0$ の周りで Taylor 展開し, x の低次の項を調べればよい.